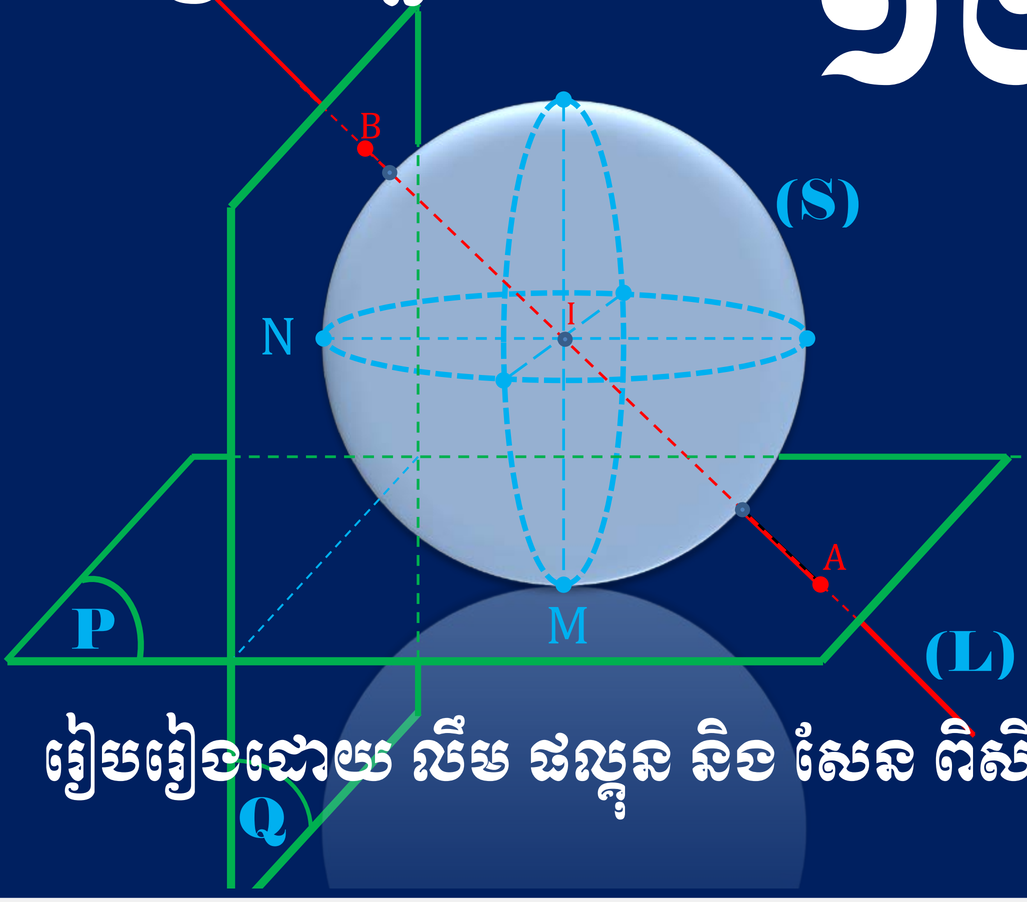
ផលគុណស្កាលែ និង ផលគុណវ៉ិចទ័រ

សម្រាប់ថ្នាក់ទី ១២



រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

រក្សាសិទ្ធិ

គណៈកម្មការនិពន្ធ និង រៀបរៀង

លឹម ផល្គុន   និង   សែន ពិសិដ្ឋ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក យ៉ង់ ឆារី

លោក លឹម ឆុន

លោក អ៊ឹង សំណាង

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិត្តសិរ

ការិយកុំព្យូទ័រ

លោក អ៊ឹង សំណាង និង លឹម ផល្គុន

អារម្ភកថា

សួស្តីមិត្តអ្នកសិក្សាជាទីស្រឡាញ់រាប់អាន !
សៀវភៅ **ដេរីវេនៃអនុគមន៍ថ្នាក់ទី១២**ដែលលោកអ្នកកំពុងតែកាន់អាននេះ ខ្ញុំបាទបានរៀបចំឡើងសម្រាប់ទុកជាឯកសារសម្រាប់អ្នកសិក្សាដែលមាន បំណងចង់យល់ដឹងអំពីមេរៀននេះឲ្យកាន់តែច្បាស់លាស់។
នៅក្នុងសៀវភៅនេះ យើងខ្ញុំបានសង្ខេបមេរៀន អមជាមួយឧទាហរណ៍គំរូ ដែលអាចឲ្យអ្នកសិក្សាងាយយល់ និង ឆាប់ចងចាំ ហើយព្រមទាំងមានលំហាត់ អនុវត្តន៍សម្រាប់អ្នកសិក្សាហ្វឹកហាត់ដោះស្រាយដោយខ្លួនឯង។

យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា សៀវភៅមួយក្បាលនេះ នឹងអាចចូលរួមផ្តល់នូវ គំនិត និង វិធីសាស្ត្រថ្មីៗក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់លើផ្នែកដេរីវេនៃអនុគមន៍ ចំពោះលោកអ្នកសិក្សាជាពុំខានឡើយ ។

ជាទីបញ្ចប់ខ្ញុំបាទសូមជូនពរចំពោះលោកអ្នក សូមមានសុខភាពល្អ មានប្រាជ្ញាឈ្លាសវៃ និង ទទួលបានជោគជ័យក្នុងគ្រប់ភារកិច្ច ។

បាត់ដំបងថ្ងៃទី០៥ កក្កដា ឆ្នាំ២០១២

អ្នកនិពន្ធ និង ស្រាវជ្រាវ

លឹម ផល្គុន

Tel :017 768 246
Email: lim_phalkun@ymail.com
Website: www.mathtoday.wordpress.com

មាតិការឿង

ទំព័រ

ជំពូកទី១

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ 001

១-ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រង់ចំណុចមួយ 001
២-ដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្តាក់ 005
៣-ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ 006
៤-ដេរីវេនៃអនុគមន៍អិុចស្ប៉ូណង់ស្យែល 011
៥-ដេរីវេនៃអនុគមន៍លោការីតនេពែ 013
៦-ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់ 016
៧-ដេរីវេនៃអនុគមន៍អាំព្លីស៊ីត 019

ជំពូកទី២

ការអនុវត្តន៍ដេរីវេនៃអនុគមន៍ 021

១-ការអនុវត្តន៍ក្នុងការគណនាតម្លៃបរមា 021

២-ល្បឿន និង សំទុះនៃចលនា 022
៣-ឌីផេរ៉ង់ស្យែល 024
៤-វិសមភាពកំណើនមានកំណត់ 025
៥-ទ្រឹស្តីបទរ៉ូល 030
៦-ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម 033
៧-អនុវត្តន៍ក្នុងសេដ្ឋកិច្ច 035

ជំពូកទី៣

អថេរភាព និង ក្រាបនៃអនុគមន៍ 037

១-សិក្សាអនុគមន៍សនិទាន 037
ក/សិក្សាអនុគមន៍ $y=\frac{ax^2+bx+c}{px+q}$ 037
ខ/សិក្សាអនុគមន៍ $y=\frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$ 056
២-សិក្សាអនុគមន៍អសនិទាន 081
ក/សិក្សាអនុគមន៍ $y=\sqrt{ax+b}$ 081
ខ/សិក្សាអនុគមន៍ $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ 086
៣-សិក្សាអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល 096
៤-សិក្សាអនុគមន៍លោការីតនេពែ 107

ជំពូកទី៤

លំហាត់មានដំណោះស្រាយ 112

ជំពូកទី៥

លំហាត់អនុវត្តន៍ 164

ឯកសារយោង 195

ជំពូកទី១

សង្ខេបរូបមន្តសំខាន់ៗ

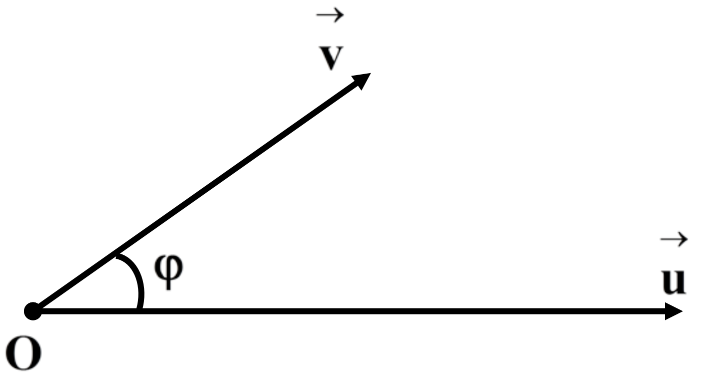
១-ផលគុណស្កាលែក្នុងលំហ

1/កន្សោមផលគុណស្កាលែ

ក-និយមន័យ

ផលគុណស្កាលែរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ក្នុងលំហគឺជាចំនួនពិតកំណត់ដោយ $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\varphi$ ។

φ ជាមុំផ្គុំឡើងដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។



ខ-កន្សោមវិភាគផលគុណស្កាលែ

ក្នុងគោលអរតូណរម៉ាល់នៃលំហ ផលគុណស្កាលែរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$ និង $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$ ក្នុងលំហាគឺជាចំនួនពិតកំណត់ដោយ $\vec{u}.\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ ។

គ-ស្កាលែ និង ណមនៃវ៉ិចទ័រ

បើគេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(a,b,c)$ នោះស្កាលែ និង ណមនៃ$\vec{u}$ កំណត់ដោយ $\vec{u}^2=a^2+b^2+c^2$ និង $|\vec{u}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ ។

ឃ-កូស៊ីនូសនៃមុំរវាងពីរវ៉ិចទ័រ

កូស៊ីនូសនៃមុំរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$ និង វ៉ិចទ័រ $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$ ក្នុងលំហាកំណត់ដោយ ៖

$$\cos\varphi=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}.\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$ ។

2/លក្ខណៈ

ក/ $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$

ខ/ $\vec{u}^{\,2}=|\vec{u}|^2$

គ/ $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$

ឃ/ $\vec{u}.(\vec{v}-\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}-\vec{u}.\vec{w}$

ង/ $\vec{u}.(\lambda\vec{v})=(\lambda\vec{u}).\vec{v}=\lambda(\vec{u}.\vec{v})$, $\lambda\in IR$

3/វ៉ិចទ័រអរតូកូណាល់ និង វ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែ

ក-វ៉ិចទ័រអរតូកូណាល់

$\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាពីរវ៉ិចទ័រអរតូកូណាល់គ្នាលុះត្រាតែ $\vec{u}.\vec{v}=0$

បើ $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$ និង $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$ នោះគេបាន ៖

$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$ ។

ខ- វ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែ

$\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាពីរវ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែគ្នាលុះត្រាតែមានចំនួនពិត

λ មួយដែល $\vec{u} = \lambda.\vec{v}$ ។

បើ $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ និង $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ នោះគេបាន ៖

$$\vec{u} // \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda x_2 \\ y_1 = \lambda y_2 \\ z_1 = \lambda z_2 \end{cases} \quad \text{ឬ} \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \text{ ។}$$

4/សមីការបន្ទាត់ក្នុងលំហ

ក-សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ **(L)** កាត់តាមចំណុច

$A(x_A, y_A, z_A)$ និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (a, b, c)$

$$\text{កំណត់ដោយ} \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \quad ; t \in IR \end{cases}$$

ខ-សមីការឆ្លុះ

សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ **(L)** កាត់តាមចំណុច $\mathbf{A(x_A,y_A,z_A)}$

និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{\mathbf{u}}=\mathbf{(a,b,c)}$ កំណត់ដោយ ៖

$$\mathbf{(L):\ \frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c}}$$ ។

5/សមីការប្លង់ក្នុងលំហ

សមីការ នៃប្លង់ **(P)** កាត់តាមចំណុច $\mathbf{A(x_A,y_A,z_A)}$

និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{\mathbf{n}}=\mathbf{(a,b,c)}$ កំណត់ដោយ ៖

$$\mathbf{(P):\ a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0}$$ ។

6/សមីការស្វ៊ែក្នុងលំហ

សមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែ**(S)** មានផ្ចិត **I(a,b,c)** និងកាំ**R**

កំណត់ដោយ $\mathbf{(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2}$ ។

7/ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅប្លង់ក្នុងលំហ

ចម្ងាយពីចំណុច $\mathbf{A(x_A, y_A, z_A)}$ ទៅប្លង់ **(P)** មានសមីការ

$\mathbf{ax + by + cz + d = 0}$ កំណត់ដោយ ៖

$$\mathbf{D = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$ ។

២-ផលគុណវិចទ័រក្នុងលំហ

1/លំហមានទិសដៅ

គេឲ្យ $\mathbf{(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$ ជាតម្រុយអរតូណរម៉ាល់នៃលំហ ។

គេថា $\mathbf{(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$ ជាតម្រុយមានទិសដៅវិជ្ជមានកាលណាអ្នកសង្កេតនៅលើកន្លះបន្ទាត់ $\mathbf{(o, \vec{k})}$ ហើយប្រអប់ជើងនៅចំគល់ **O** បែរមុខទៅចំទិសនៃ $\mathbf{\vec{i}}$ ហើយមានវ៉ិចទ័រ $\mathbf{\vec{j}}$ នៅខាងឆ្វេងដៃនៃអ្នកសង្កេត ។

2/និយមន័យផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ

គេឲ្យ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាពីរវ៉ិចទ័រនៃលំហ ។

ផលគុណរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ គឺជាវ៉ិចទ័រ $\vec{u}\times\vec{v}$ ឬ $\vec{u}\wedge\vec{v}$

កំណត់ដោយ $\vec{u}\times\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin\varphi.\vec{k}$ ។

ដែល φ ជាមុំផ្គុំឡើងដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។

3/លក្ខណៈនៃផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ

ក/ $\vec{u}\times\vec{v} = -(\vec{v}\times\vec{u})$

ខ/ $\vec{u}\times\vec{u} = \vec{O}$

គ/ $(\lambda\vec{u})\times\vec{v} = \vec{u}\times(\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u}\times\vec{v})$

ឃ/ $\vec{u}\times\vec{O} = \vec{O}\times\vec{u} = \vec{O}$

ង/ $\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\times\vec{v}).\vec{w}$

4/កន្សោមផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័ក្នុងគោលអរតូណរម៉ាល់

មានទិសដៅវិជ្ជមាន ៖

គេឲ្យ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ជាតម្រុយមានទិសដៅវិជ្ជមាន ។

បើ $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$ និង $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$ នោះគេបាន ៖

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$

5/ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ និង ប្រលេឡូក្រាម

ក-ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ

ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC កំណត់ដោយ ៖

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}|$$

ខ-ប្រលេឡូក្រាម

ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ **ABCD** កំណត់ដោយ ៖

$$S_{ABCD} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| \quad ។$$

6/ផលគុណចម្រុះនៃបីវ៉ិចទ័ក្នុងលំហ

ក-និយមន័យ

គេមាន $\vec{u}, \vec{v}$ និង $\vec{w}$ ជាពីរវ៉ិចទ័នៃលំហ ។

ផលគុណចម្រុះនៃបីវ៉ិចទ័រៀបតាមលំដាប់ $\vec{u}, \vec{v}$ និង $\vec{w}$

គឺជាចំនួនពិតកំណត់ដោយ $\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w})$ ។

ខ-ទ្រឹស្តីបទ

បើ $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ និង $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$

នោះគេបាន ៖

$$\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$ ។

7/មាឌរបស់ប្រលេពីប៉ែត និង មាឌតេត្រាអ៊ែត

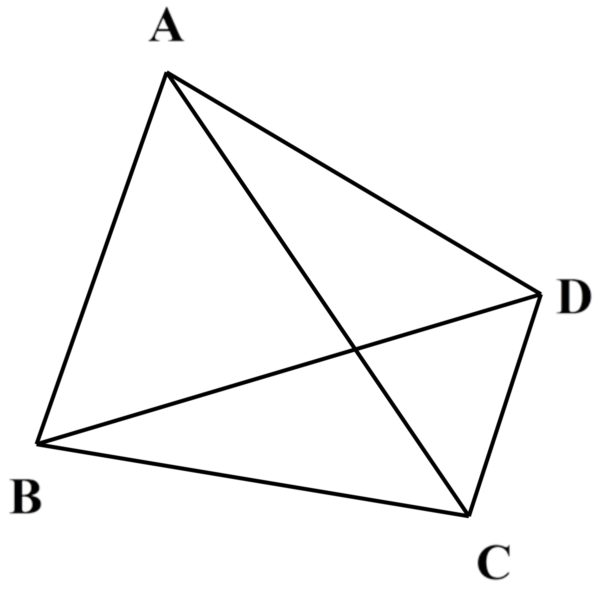
ក-មាឌរបស់ប្រលេពីប៉ែត

មាឌរបស់ប្រលេពីប៉ែតដែលសង់លើ $\vec{u}$, $\vec{v}$ និង $\vec{w}$

កំណត់ដោយ $V=\left|\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})\right|$ ។

ខ- មាឌតេត្រាអ៊ែត

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}\right|$$



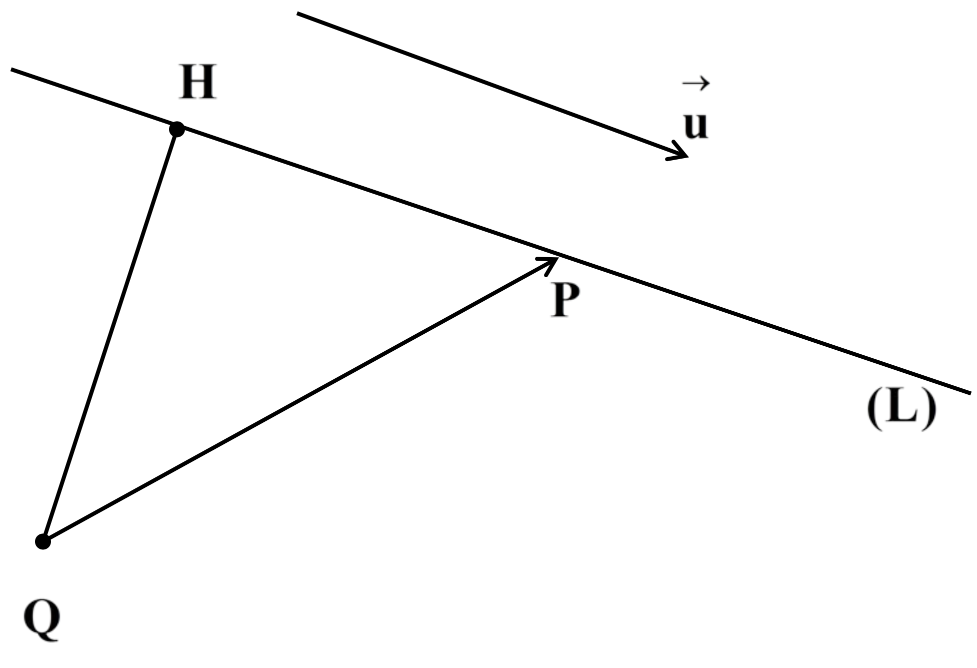
8/ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅបន្ទាត់មួយក្នុងលំហ

ទ្រឹស្តីបទ ៖

ចម្ងាយពីចំណុច **Q** ទៅបន្ទាត់ **(L)** កំណត់ដោយ ៖

$$\mathbf{D} = \frac{|\overrightarrow{\mathbf{PQ}} \times \vec{\mathbf{u}}|}{|\vec{\mathbf{u}}|}$$ ។

ដែល $\mathbf{P} \in \mathbf{(L)}$ និង $\vec{\mathbf{u}}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ ។



ជំពូកទី២

កម្រងលំហាត់ជ្រើសរើស

១-ក្នុងតម្រុយអរតូណាម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានបីចំណុច $A(-1,2,3)$ $B(0,-1,1)$ និង $C(2,3,5)$ ។

ក–ចូរកំណត់សមីការប្លង់ (P)កាត់តាមចំណុច A ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BC}$ និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (L) កាត់តាមពីរចំណុច B និង C ។

ខ–គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ H រវាងបន្ទាត់ (L) ជាមួយប្លង់ (P) ។

គ–រកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC រួចគណនាផ្ទៃក្រលានៃ ΔABC ។

២-ក្នុងតម្រុយអរតូណាម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានបួនចំណុច $A(4,0,0)$

$B(0,-2,0)$, $C(0,0,2)$ និង $D(4,2,2)$ ។

ក–បង្ហាញថាចតុកោណ ABCD ជាប្រលេឡូក្រាម ។

ខ–ចូរកំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (BC) និងសមីការនៃប្លង់

កាត់តាមបីចំណុច A,B និង C ។

គ–យក H ជាចំណោលកែងនៃ A លើបន្ទាត់ (BC) ។

រកកូអរដោនេនៃចំណុច H រួចគណនា AH និងផ្ទៃក្រលាប្រលេឡូ

ក្រាម ABCD ។

ឃ–គេមានចំណុច $S(1,6,-6)$ ។ បង្ហាញថាបន្ទាត់ (SA) កែងនឹង

ប្លង់ (ABCD) រួចគណនាមាឌនៃពីរ៉ាមីត SABCD ។

៣-ក្នុងតម្រុយអរតូណាម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(1,2,3)$

និងប្លង់ $(\alpha): x+2y-2z-8=0$ ។

ក–កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (Δ) គូសចេញពីចំណុច A ហើយកែងនឹងប្លង់ (β) ត្រង់ចំណុច H ។

ខ–គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H និងចំណុច A' ឆ្លុះគ្នានឹង A ធៀបនឹងប្លង់ (α) ។

គ–កំណត់សមីការប្លង់ (β) កាត់តាមចំណុច A' ហើយស្របនឹងប្លង់ (α) ខាងលើ ។

៩-គេឲ្យ $(\alpha): 2x+2y+z-9=0$ និង $(\Delta):\begin{cases} x=2-t \\ y=6-4t \\ z=2+t \quad, t\in IR \end{cases}$

ក–រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ (Δ) និងប្លង់ (α) ។

ខ–កំណត់រង្វាស់មុំស្រួចរវាងបន្ទាត់ (Δ) និង ប្លង់ (α) ។

គ–កំណត់សមីការប្លង់ (β) កែងនឹងបន្ទាត់ (Δ) ត្រង់ចំណុច A ។

ឃ–កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ (α) និង (β)

៥-គេឲ្យប្លង់ $(\alpha): 2x-2y+z-1=0$ និងស្វ៊ែ (S) មានសមីការ

$(S): x^2+y^2+z^2+2x-8y-4z+12=0$ ។

ក–បង្ហាញថាប្លង់ (α) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ត្រង់ចំណុច A មួយ ។

ខ–កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះ A ។

គ–កំណត់សមីការបន្ទាត់ (Δ) កែងនឹងប្លង់(α) ត្រង់ចំណុច A ។

ឃ–ក្រៅពីចំណុច A បន្ទាត់(Δ) ប្រសព្វស្វ៊ែ (S)ត្រង់ចំណុច B មួយទៀត ។ ចូរកំណត់កូអរដោនេចំណុច B រួចកំណត់សមីការនៃប្លង់ (β) ដែលប៉ះស្វ៊ែ (S) ត្រង់ B ។

៦-គេឲ្យបន្ទាត់ $(\Delta): \frac{x+4}{3}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+3}{4}$ និងស្វ៊ែ (S) មានសមីការ

$(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$ ។

ក–រកកូអរដោនេចំណុច A និង B ប្រសព្វរវាង (Δ) និង (S) ។

ខ–រកសមីការប្លង់ (α) និង (β) ដែលប៉ះស្វ៊ែ(S)ត្រង់ A និង B ។

គ–កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (Δ') ជាប្រសព្វរវាងប្លង់

(α) និង (β) ខាងលើ ។

៧-គេឲ្យបន្ទាត់ $(d): \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{-1}$ និងស្វ៊ែ (S) មានសមីការ

ទូទៅ $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 = 0$ ។

ក–កំណត់កូអរដោនេផ្ចិត I និង កាំ R របស់ស្វ៊ែ (S) ។

ខ–តាង A ជាចំណោលកែងនៃ I លើបន្ទាត់ (d) ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច A ។គណនា IA រួចទាញថាបន្ទាត់(d)ប៉ះនឹងស្វ៊ែ(S) ។

គ–កំណត់សមីការប្លង់កែងនឹងបន្ទាត់(d) ហើយប៉ះនឹងស្វ៊ែ(S) ។

៨-គេឲ្យបន្ទាត់ $(d): \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{4}$ និងប្លង់(α) មានសមីការ

$(\alpha): x + 2y + 2z - 10 = 0$ ។

ក–កំណត់កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ A រវាង(d)និងប្លង់(α) ។

ខ–រកសមីការស្វ៊ែកាំ $R=3$ ហើយប៉ះនឹងប្លង់(α) ត្រង់ចំណុច A ។

៩-គេឲ្យប្លង់ពីរ $(\alpha): x+2y+2z-11=0$ និង $(\beta): 2x-2y+z-1=0$

និងបន្ទាត់ $(\Delta): x=3+t\ , y=6-4t\ , z=7-t$ ដែល $t\in IR$

ក–គណនាកូអរដោណេចំណុចប្រសព្វ A និង B រវាងបន្ទាត់ (Δ)

ជាមួយប្លង់ (α) និង (β) រៀងគ្នា ។

ខ–យក C ជាចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x=1$ ហើយស្ថិតនៅក្នុងប្លង់

(α) និង (β) ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច C រួចរក្រេបភេទនៃ ΔABC

គ–កំណត់សមីការស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិតនៅលើបន្ទាត់ (Δ) ហើយប៉ះ

រួមទៅនឹងប្លង់ (α) និង (β) ។

១០-គេឲ្យបន្ទាត់ពីរ (d_1) និង (d_2) មានសមីការឆ្លុះរៀងគ្នា ៖

$(d_1): \frac{x-5}{-2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{2}$ និង $(d_2): \frac{x-6}{-4}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{3}$

A ជាចំណុចមួយនៃ (d_1) មានអាប់ស៊ីស $x_A=1$ ហើយ B ជា

ចំណុចមួយនៃ (d_2) មានអាប់ស៊ីស $x_B=t$ ដែល $t\in IR$ ។

ក–ចូរស្រាយថា $AB=\frac{\sqrt{26(t-2)^2+144}}{4}$

ខ–កំណត់តម្លៃ t ដើម្បីឲ្យ (AB) មានតម្លៃអប្បបរមា ។

គ–ចំពោះតម្លៃ t ដែលបានរកឃើញខាងលើ ចូរបង្ហាញថា (AB) ជាបន្ទាត់កែងរួមរវាងបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2) រួចទាញរកចម្ងាយរវាងបន្ទាត់(d_1) និង (d_2) ។

១១-គេឲ្យបន្ទាត់ពីរ (d_1) និង (d_2) មានសមីការឆ្លុះរៀងគ្នា ៖

$(d_1): x-2=\frac{y-4}{2}=\frac{z-5}{2}$ និង $(d_2): \frac{x-3}{-1}=y=\frac{z-4}{4}$

ចូររកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់កែងរួមរវាងបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2)

១២-នៅក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឲ្យមានចំណុច $A(-1,4,4)\,;B(1,2,3)$ និង $C(3,2,4)$ ។

ក–គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចទាញថាបីចំណុច A,B,C

រត់មិនត្រង់គ្នា។ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

ខ–កំណត់សមីការប្លង់ (ABC) ។

គ–គណនាមាឌនៃចតុមុខ OABC រួចទាញរកចម្ងាយពីចំណុច O ទៅប្លង់ (ABC) ។

១៣-នៅក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឲ្យមានចំណុច $A(0,2,1),B(2,1,-1),C(-4,5,3)$ និង $D(4,6,3)$ ។

ក–ចូរស្រាយថា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃ ΔABC ។

ខ–កំណត់សមីការប្លង់ (ABC) ។

គ–គណនា $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}$ រួចទាញរកមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត ABCD ។

ឃ–ទាញរកចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (ABC) ។

១៤-នៅក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឲ្យមានចំណុច $A(2,2,1),B(3,1,1),C(-2,4,5)$ និង $D(1,-1,0)$ ។

ក–គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}$ រួចទាញថាបីចំណុច A,B,C

មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃ ΔABC ។

ខ–កំណត់សមីការប្លង់ (ABC) ។

គ–គណនា$(\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}).\overrightarrow{BD}$ រួចទាញរកមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ ។

ឃ–ទាញរកចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (ABC) ។

១៥-គេឲ្យប្លង់(P) កាត់តាម $A(4,-2,2)$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់

$\vec{n}=(1,2,2)$ ហើយបន្ទាត់ $(L):\frac{x-1}{-1}=\frac{y-4}{4}=z-2$ ។

ក-កំណត់សមីការនៃប្លង់(P) រួចគណនាកូអរដោនេចំណុច M ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់(P) ។

ខ-យក B,C,D ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) ជាមួយអ័ក្ស $(ox),(oy),(oz)$ រៀងគ្នាហើយ S ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់(L) និងអ័ក្ស(oz) ។

ចូរស្រាយថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាមរួចគណនាផ្ទៃក្រលារបស់វា ។

គ-បង្ហាញថាបន្ទាត់ (SA) អរត្តូកូណាល់នឹងប្លង់ $(ABCD)$ ។

គណនារង្វាស់ SA រួចទាញរកមាឌនៃពីរ៉ាមីត $SABCD$ ។

១៦-គេឲ្យប្លង់ (P) មានសមីការ $(P): 2x + 2y + z - 1 = 0$ និងបន្ទាត់

(L) មានសមីការ $(L): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 - t \\ z = 1 + 4t \quad , t \in IR \end{cases}$

ក-គណនាកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ M រវាងប្លង់ (P) និងបន្ទាត់ (L)

ខ-យក A ជាចំណុចនៅក្នុងប្លង់ (P) មានអាប់ស៊ីស $x_A = -2$

B និង C ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (L) ជាមួយអក្ស (ox) និង (oy) ។

កំណត់កូអរដោនេ A ដើម្បីឲ្យ ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាត

កំពូល A ។ កំណត់សមីការប្លង់ (ABC) ។

១៧-គេឲ្យបន្ទាត់ (L) មានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ

$(L): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = 5 + 2t \quad , t \in IR \end{cases}$ និងប្លង់ $(P): x + 3y + 4z - 19 = 0$ ។

ក-គណនាកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ **M** រវាងប្លង់ **(P)** និងបន្ទាត់ **(L)**

ខ-រកសមីការប្លង់ **(Q)** កាត់តាមបន្ទាត់ **(L)** ហើយកែងនឹងប្លង់ **(P)**

៩-ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

គេមានចំណុច $A(2,1,-1)$ និងប្លង់ពីរ **(P)** និង **(Q)** មាន

សមីការរៀងគ្នា $x+2y+2z-11=0$ និង $3x+y-4z+7=0$

ក-រកសមីការប្លង់ **(R)** កាត់តាមចំណុច **A** ហើយកែងរួម

ទៅនឹងប្លង់ពីរ **(P)** និង **(Q)** ។

ខ-រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់ទាំងបី **(P),(Q),(R)**

គ-យក **C** ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ **(R)** ជាមួយនឹងអក្ស័ **(oz)** ។

រកប្រភេទនៃត្រីកោណ **ABC** រួចគណនាផ្ទៃក្រឡារបស់វា

ឃ-រកកូអរដោនេ **D** ដោយដឹងថាចតុកោណ **ABCD**

ជាប្រលេឡូក្រាម ។

ង-តាង**E** ជាចំណុចកណ្តាលនៃ[**AB**] និង **F** ជាចំណុច

កណ្តាលនៃ [**CD**] ។ បង្ហាញថា **EAFC** ជាការេ ។

ជំពូកទី៣

ផ្នែកដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១

ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានបីចំណុច $A(-1,2,3)$ $B(0,-1,1)$ និង $C(2,3,5)$ ។

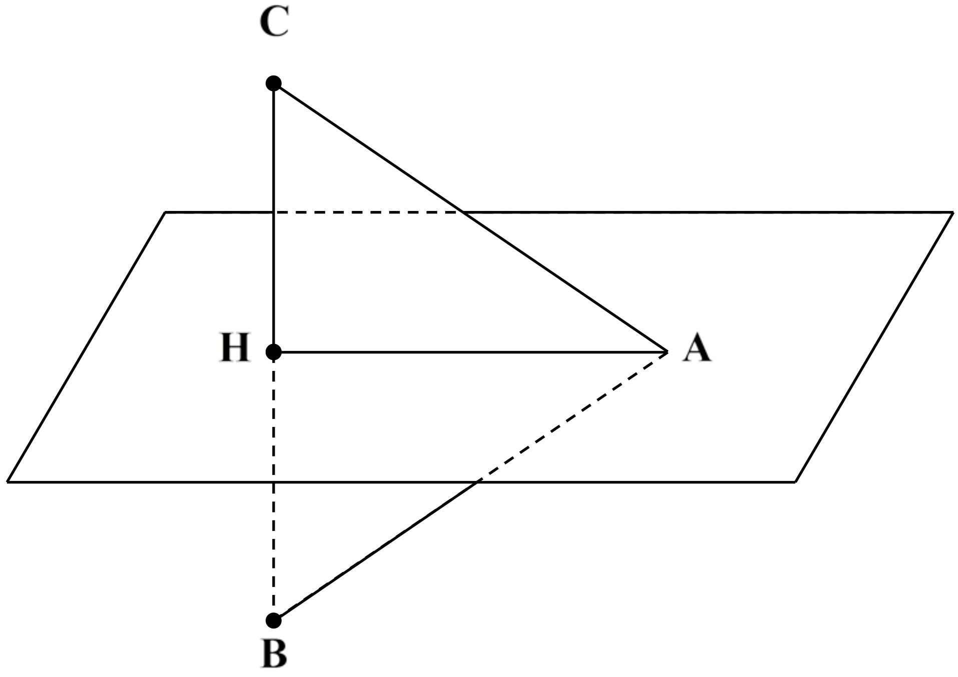
ក–ចូរកំណត់សមីការប្លង់ (P)កាត់តាមចំណុច A ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BC}$ និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (L) កាត់តាមពីរចំណុច B និង C ។

ខ–គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ H រវាងបន្ទាត់ (L) ជាមួយប្លង់ (P) ។

គ–រកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC រួចគណនាផ្ទៃក្រលានៃ ΔABC ។

ដំណោះស្រាយ

ក- កំណត់សមីការប្លង់ (P) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (L) ៖



វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P)គឺ $\vec{n} = \overrightarrow{BC} = (2,4,4)$ ។

សមីការប្លង់(P) កាត់តាមចំណុច A អាចសរសេរតាមរូបមន្ត

$$(P): a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$(P): 2(x+1) + 4(y-2) + 4(z-3) = 0$$

$$(P): 2x + 4y + 4z - 18 = 0$$

$$(P): x + 2y + 2z - 9 = 0$$

ដូចនេះ $(P): x + 2y + 2z - 9 = 0$ ។

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (L) គឺ $\vec{u} = \overrightarrow{BC} = (2,4,4)$

សមីការបន្ទាត់ (L) កាត់តាមពីរចំណុច B និង C អាចសរសេរ

តាមរូបមន្ត $(L): \begin{cases} x = x_B + at \\ y = y_B + bt \\ z = z_B + ct \quad , t \in IR \end{cases}$

ដូចនេះ $(L): \begin{cases} x = 2t \\ y = -1 + 4t \\ z = 1 + 4t \quad , t \in IR \end{cases}$

ខ–គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ H ៖

យកសមីការ (L) ជំនួសក្នុង (P) គេបាន ៖

$2t + 2(-1 + 4t) + 2(1 + 4t) - 9 = 0$

$2t - 2 + 8t + 2 + 8t - 9 = 0$

$18t - 9 = 0$ នាំឲ្យ $t = \frac{1}{2}$ ។

យកតម្លៃ $t = \frac{1}{2}$ ជួសក្នុងសមីការ(L)គេបាន $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + 2 = 1 \\ z = 1 + 2 = 3 \end{cases}$

ដូចនេះ H(1,1,3) ។

គ-រកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC រួចគណនាផ្ទៃក្រលានៃ ΔABC

គេមាន $\overrightarrow{AB}=(1,-3,-2)\,;\overrightarrow{BC}=(2,4,4)\,;\overrightarrow{CA}=(-3,-1,-2)$

ដោយ $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1+9+4}=\sqrt{14}\,;|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{9+1+4}=\sqrt{14}$

នោះគេទាញ $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{14}$ ។

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល A ។

ម្យ៉ាងទៀត $\overrightarrow{AH}=(2,-1,0)$

គេបាន $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=(2)(2)+(-1)(4)+(0)(4)=0$ សមមូល $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$

នោះ AH ជាកម្ពស់នៃ ΔABC ។ គេបាន $S_{ABC}=\frac{1}{2}AH.BC$

តែ $AH=\sqrt{4+1+0}=\sqrt{5}\,,BC=\sqrt{4+16+16}=6$

ដូចនេះ $S_{ABC}=3\sqrt{5}$ (ឯកតាផ្ទៃ)។

លំហាត់ទី២

ក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានបួនចំណុច **A(4,0,0)** **B(0,−2,0)** , **C(0,0,2)** និង **D(4,2,2)** ។

ក-បង្ហាញថាចតុកោណ **ABCD** ជាប្រលេឡូក្រាម ។

ខ-ចូរកំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ **(BC)** និងសមីការនៃប្លង់កាត់តាមបីចំណុច **A,B** និង **C** ។

គ-យក **H** ជាចំណោលកែងនៃ **A** លើបន្ទាត់ **(BC)** ។

រកកូអរដោនេនៃចំណុច **H** រួចគណនា **AH** និងផ្ទៃក្រលាប្រលេឡូក្រាម **ABCD** ។

ឃ-គេមានចំណុច **S(1,6,−6)** ។ បង្ហាញថាបន្ទាត់ **(SA)** កែងនឹងប្លង់ **(ABCD)** រួចគណនាមាឌនៃពីរ៉ាមីត **SABCD** ។

ដំណោះស្រាយ

ក-បង្ហាញថាចតុកោណ **ABCD** ជាប្រលេឡូក្រាម

គេមាន $\overrightarrow{AD}=(0,2,2)$ និង $\overrightarrow{BC}=(0,2,2)$

ដោយ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ នោះ **ABCD** ជាប្រលេឡូក្រាម ។

ខ-កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (BC) ៖

បន្ទាត់ (BC) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{BC}=(0,2,2)$

តាមរូបមន្ត $(BC):\begin{cases} x=x_B+at \\ y=y_B+bt \\ z=z_B+ct \quad , t\in IR \end{cases}$

ដូចនេះ $(BC):\begin{cases} x=0 \\ y=-2+2t \\ z=2t \quad ,t\in IR \end{cases}$

កំណត់សមីការនៃប្លង់កាត់តាមបីចំណុច **A,B** និង **C** ៖

តាង $(P): ax+by+cz+d=0$ ជាប្លង់កាត់តាមបីចំណុច **A,B** និង **C**

នោះកូអរដោនេនៃចំណុច **A,B** និង **C** ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ (P)

គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} 4a+d=0 \\ -2b+d=0 \\ 2c+d=0 \end{cases}$ នាំឲ្យ $a=-\frac{d}{4}$, $b=\frac{d}{2}$, $c=-\frac{d}{2}$

យក $a=-\frac{d}{4}$, $b=\frac{d}{2}$, $c=-\frac{d}{2}$ ជួសក្នុង (P) គេបាន ៖

$-\frac{d}{4}x+\frac{d}{2}y-\frac{d}{2}z+d=0$ ឬ $(P): x-2y+2z-4=0$ ។

គ-រកកូអរដោនេនៃចំណុច H រួចគណនា AH និងផ្ទៃក្រលាប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ ៖

តាង $H(x_H, y_H, z_H)$ ។

ដោយ $H\in(BC)$ នោះ $\begin{cases} x_H=0 \\ y_H=-2+2t \quad (1) \\ z_H=2t \end{cases}$

គេបាន $\overrightarrow{AH}=(-4\,,-2+2t\,,2t\,)$

ដោយ $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0$

គេបាន $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=(0)(-4)+2(-2+2t)+2(2t)=0$ នោះ $t=\frac{1}{2}$

យក $t=\frac{1}{2}$ ជួសក្នុង (1) គេបាន $x_H=0, y_H=-2+1=-1$, $z_H=1$ ។

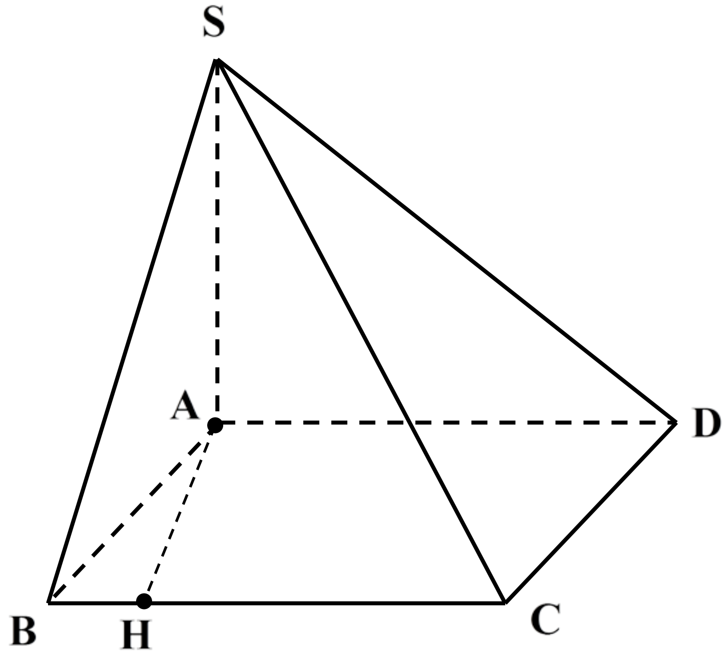
ដូចនេះ $H(0,-1,1)$ ។

ហើយ $AH=\sqrt{(-4)^2+(-1)^2+1^2}=3\sqrt{2}$ និង $BC=\sqrt{0+4+4}=2\sqrt{2}$

គេបាន $S_{ABCD}=AH.BC=(3\sqrt{2})(2\sqrt{2})=12$ ។

ដូចនេះ $AH=3\sqrt{2}$, $S_{ABCD}=12$(ឯកតាផ្ទៃ)។

ឃ- បង្ហាញថាបន្ទាត់ (SA) កែងនឹងប្លង់ (ABCD) ៖



$\overrightarrow{SA} = (3\,,-6,6)\,,\,\overrightarrow{AB} = (-4,-2,0)\,,\overrightarrow{AD} = (0,2,2)$

គេមាន $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AB} = -12 + 12 + 0 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{SA} \perp \overrightarrow{AB}$

ហើយ $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AD} = 0 - 12 + 12 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{SA} \perp \overrightarrow{AD}$

នោះគេទាញបាន $(SA) \perp (ABCD)$ ។

គណនាមាឌនៃពីរ៉ាមីត SABCD ៖

តាមរូបមន្ត $V_{SABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \times SA$ ដោយ $SA = \sqrt{9 + 36 + 36} = 9$

ដូចនេះ $V_{SABCD} = \frac{1}{3} \times 12 \times 9 = 36$ (ឯកតាមាឌ)។

លំហាត់ទី៣

ក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(1,2,3)$

និងប្លង់ $(\alpha): x+2y-2z-8=0$ ។

ក-កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (Δ) គូសចេញពីចំណុច A

ហើយកែងនឹងប្លង់ (β) ត្រង់ចំណុច H ។

ខ-គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H និងចំណុច A' ឆ្លុះគ្នានឹង A

ធៀបនឹងប្លង់ (α) ។

គ-កំណត់សមីការប្លង់ (β) កាត់តាមចំណុច A' ហើយស្របនឹង

ប្លង់ (α) ខាងលើ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (Δ) ៖

ប្លង់ $(\alpha): x+2y-2z-8=0$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(1,2,-2)$ ។

ដោយបន្ទាត់ $(\Delta)\perp(\alpha)$ នោះ $\vec{n}=(1,2,-2)$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃ (Δ)

ដូចនេះសមីការបន្ទាត់ (Δ) កាត់តាម $A(1,2,3)$ សរសេរ ៖

$$(\Delta):\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=3-2t \quad ; t\in IR \end{cases}$$

ខ-គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H និងចំណុច A' ឆ្លុះគ្នានឹង A

ធៀបនឹងប្លង់ (α) ៖

យកសមីការ (Δ) ជួសក្នុង (α) គេបាន ៖

$$(1+t)+2(2+2t)-2(3-2t)-8=0$$
$$1+t+4+4t-6+4t-8=0$$
$$9t-9=0$$

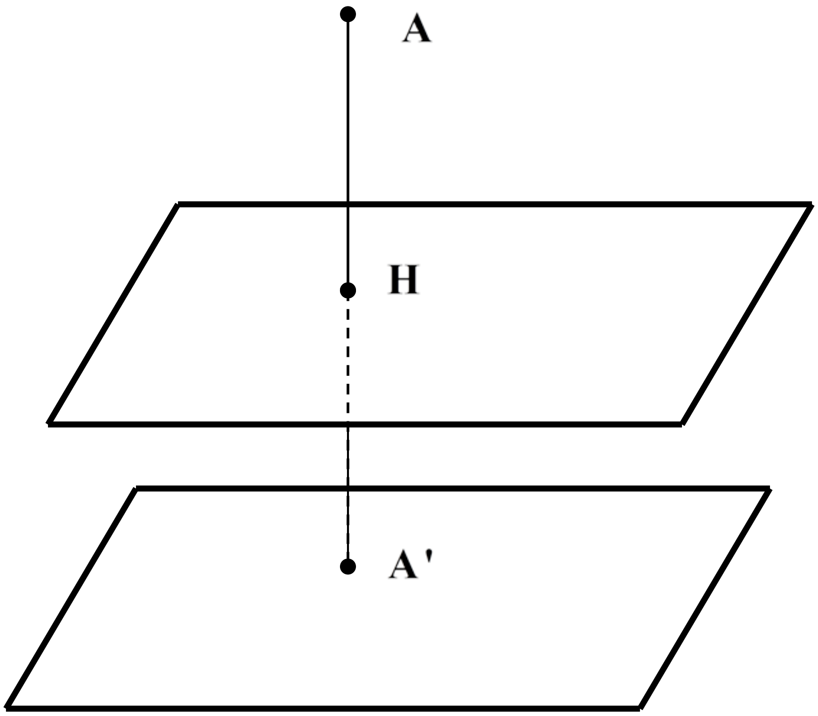
គេទាញបាន $t=\frac{9}{9}=1$ យកជួសក្នុងសមីការ (Δ) គេបាន

$H(2,4,1)$ ។ ហើយដោយចំណុច A' ឆ្លុះគ្នានឹង A ធៀបនឹងប្លង់ (α) នោះចំណុច H ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ A និង A' ។

គេបាន $x_{A'}=2x_H-x_A=4-1=3$, $y_{A'}=2y_H-y_A=8-2=6$

និង $z_{A'} = 2z_H - z_A = 2 - 3 = -1$ ។ដូចនេះ $A'(3,6,-1)$ ។

គ–កំណត់សមីការប្លង់ (β)៖



ដោយ $(\beta)//(\alpha)$ នោះ $\vec{n} = (1, 2, -2)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃ (β) ។

ដោយ (β) កាត់តាមចំណុច $A'(3,6,-1)$ នោះគេបាន ៖

$$(\beta): 1.(x-3) - 2(y-6) + 2(z+1) = 0$$
$$(\beta): x - 3 - 2y + 12 + 2z + 2 = 0$$
$$(\beta): x - 2y + 2z + 11 = 0$$

ដូចនេះ $(\beta): x - 2y + 2z + 11 = 0$ ។

លំហាត់ទី៤

គេឲ្យ $(\alpha): 2x+2y+z-9=0$ និង $(\Delta): \begin{cases} x=2-t \\ y=6-4t \\ z=2+t \quad , t\in IR \end{cases}$

ក-រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ **A** រវាងបន្ទាត់ (Δ) និងប្លង់ (α) ។

ខ-កំណត់រង្វាស់មុំស្រួចរវាងបន្ទាត់ (Δ) និង ប្លង់ (α) ។

គ-កំណត់សមីការប្លង់ (β) កែងនឹងបន្ទាត់ (Δ) ត្រង់ចំណុច **A** ។

ឃ-កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ (α) និង (β)

ដំណោះស្រាយ

ក-រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ **A** រវាងបន្ទាត់ (Δ) និងប្លង់ (α)៖

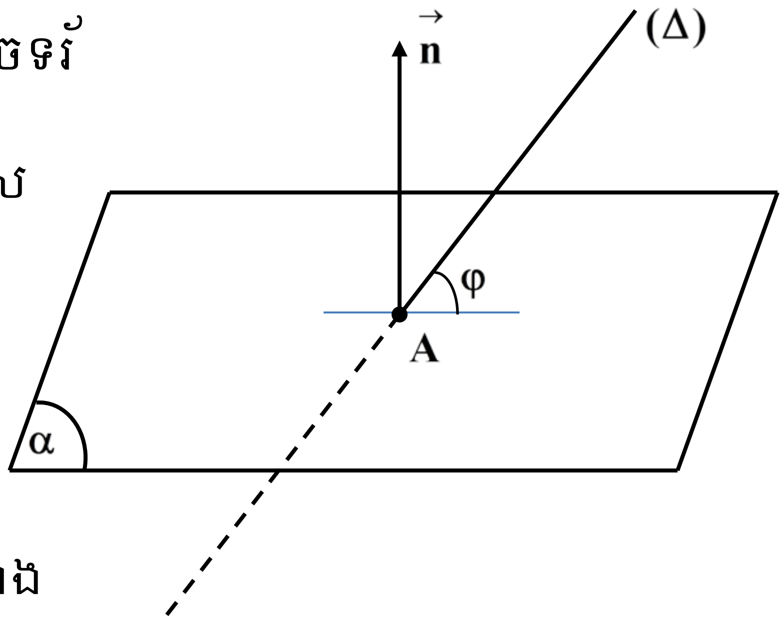
យកសមីការ (Δ) ជួសក្នុង (α) គេបាន ៖

$$2(2-t)+2(6-4t)+(2+t)-9=0$$
$$4-2t+12-8t+2+t-9=0$$
$$-9t+9=0$$

គេទាញបាន $t=1$ យកជួសក្នុង (Δ) គេបាន $x=1, y=2, z=3$

ដូចនេះ $A(1,2,3)$ ។

ខ-កំណត់រង្វាស់មុំស្រួចរវាងបន្ទាត់ (Δ) និង ប្លង់ (α) ៖



តាង $\vec{n}$ និង $\vec{u}$ រៀងគ្នាជាវ៉ិចទ័រ

ណរម៉ាល់ និងវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស

នៃប្លង់(α) និងបន្ទាត់(Δ)

ហើយ θ ជាមុំរវាងវ៉ិចទ័រ

$\vec{n}$ និង $\vec{u}$ ហើយ φ ជាមុំរវាង

បន្ទាត់(Δ)និងប្លង់(α) នោះ គេបាន $\varphi=\frac{\pi}{2}-\theta$ ។

គេមាន $\vec{n}=(2,2,1)\,;\,\vec{u}=(-1,-4,1)$ ។

$$\cos\theta=\left|\frac{\vec{n}.\vec{u}}{|\vec{n}|.|\vec{u}|}\right|=\left|\frac{-2-8+1}{\sqrt{4+4+1}\sqrt{1+16+1}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$$ គេបាន $\theta=\frac{\pi}{4}$

ដូចនេះ $\varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$ ។

គ-កំណត់សមីការប្លង់ (β) កែងនឹងបន្ទាត់ (Δ) ត្រង់ចំណុច A ៖

ដោយ $(\beta)\perp(\Delta)$ នោះ $\vec{u}=(-1,-4,1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (β)

តាមរូបមន្ត $(\beta): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

ដោយ $A\in(\beta)$ នោះ $(\beta): -(x-1)-4(y-2)+(z-3)=0$

ដូចនេះ $(\beta): -x-4y+z+6=0$ ។

ឃ-កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ (α) និង (β)

យក $z=t\ ,t\in IR$ នោះ $\begin{cases}2x+2y+t-9=0\\ -x-4y+t+6=0\end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន $x=4-t\ ,\ y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t$

ដូចនេះ $(d):\begin{cases}x=4-t\\ y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\\ z=t \qquad ,t\in IR\end{cases}$

លំហាត់ទី៥

គេឲ្យប្លង់ $(\alpha): 2x-2y+z-1=0$ និងស្វ៊ែ (S) មានសមីការ

$(S): x^2+y^2+z^2+2x-8y-4z+12=0$ ។

ក–បង្ហាញថាប្លង់ (α) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ត្រង់ចំណុច A មួយ ។

ខ–កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះ A ។

គ–កំណត់សមីការបន្ទាត់ (Δ) កែងនឹងប្លង់ (α) ត្រង់ចំណុច A ។

ឃ–ក្រៅពីចំណុច A បន្ទាត់ (Δ) ប្រសព្វស្វ៊ែ (S) ត្រង់ចំណុច B មួយទៀត ។ ចូរកំណត់កូអរដោនេចំណុច B រួចកំណត់សមីការនៃប្លង់ (β) ដែលប៉ះស្វ៊ែ (S) ត្រង់ B ។

ដំណោះស្រាយ

ក–បង្ហាញថាប្លង់ (α) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ត្រង់ចំណុច A មួយ ៖

សមីការស្វ៊ែ (S) អាចសរសេរជាទម្រង់ស្តង់ដាដូចខាងក្រោម ៖

$(S):(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=9$ នោះគេទាញបាន $I(-1,4,2)$

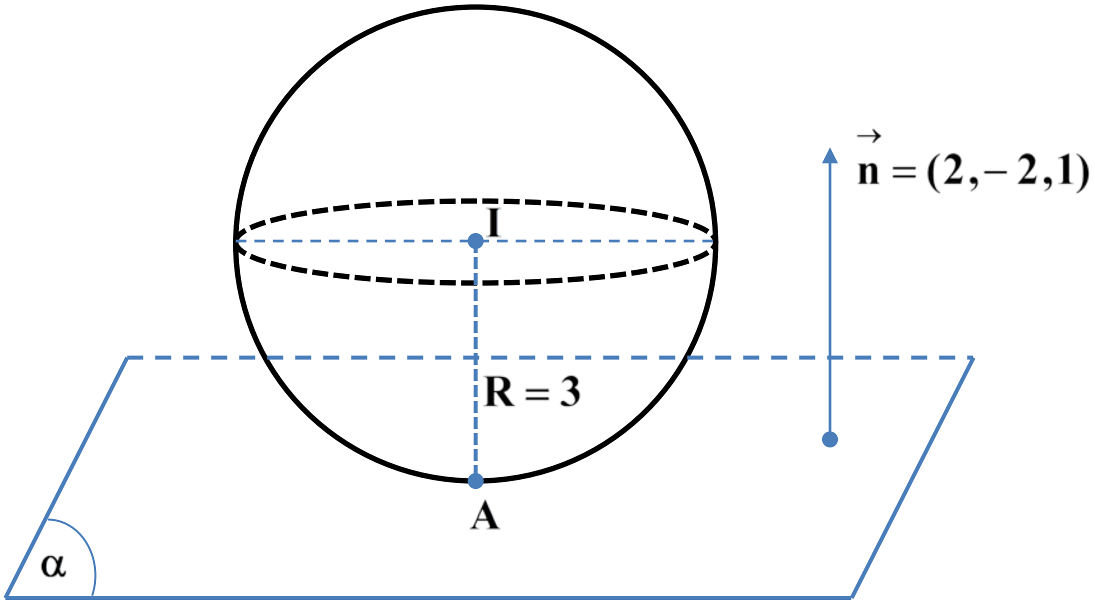
ជាផ្ចិត និង $R=3$ ជារង្វាស់កាំរបស់ស្វ៊ែ ។

ចម្ងាយពីចំណុច I ទៅប្លង់ (α) កំណត់ដោយ ៖

$$d(I,\alpha)=\frac{|2x_I-2y_I+z_I-1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{|-2-8+2-1|}{3}=3$$

ដោយ $d(I,\alpha)=R=3$ នោះប្លង់ (α) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ត្រង់ចំណុចមួយ

ខ–កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះ A ៖



តាង $A(x_A,y_A,z_A)$ ជាចំណុចប៉ះដែលត្រូវរក ។

គេមាន $A\in(\alpha)$ នោះ $2x_A-2y_A+z_A-1=0$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $\overrightarrow{IA}//\vec{n}$ នោះ $\overrightarrow{IA}=t.\vec{n}$

ដោយ $\overrightarrow{IA}=(x_A+1,y_A-4,z_A-2)$ និង $\vec{n}=(2,-2,1)$

គេបាន $\begin{cases}x_A+1=2t\\ y_A-4=-2t\\ z_A-2=t\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}x_A=2t-1\\ y_A=-2t+4\\ z_A=t+2\end{cases}$ (2)

យកសមីការ (2) ជួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$2(2t-1)-2(-2t+4)+(t+2)-1=0$$
$$4t-2+4t-8+t+2-1=0$$
$$9t-9=0$$

គេទាញបាន $t=1$ យកជំនួសក្នុង(2)គេបាន $x_A=1,y_A=2,z_A=3$

ដូចនេះ $A(1,2,3)$ ។

គ–កំណត់សមីការបន្ទាត់ (Δ) កែងនឹងប្លង់(α) ត្រង់ចំណុច A ៖

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់(Δ)ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់(α)

នោះគេបាន $\vec{u}=\vec{n}=(2,-2,1)$ ហើយដោយ $A\in(\Delta)$ នោះ

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃ (Δ) អាចសរសេរ ៖

$$(\Delta):\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-2t \\ z=3+t \ , \ t\in IR \end{cases}$$ ។

ឃ–កំណត់កូអរដោនេចំណុច B ៖

តាង $B(x_B,y_B,z_B)$ ។ ដោយ $B\in(\Delta)$ នោះ $\begin{cases} x_B=1+2t \\ y_B=2-2t \\ z_B=3+t \end{cases}$ (3)

យក (3) ជំនួសក្នុងសមីការស្គង់ដានៃ (S) គេបាន ៖

$$(1+2t+1)^2+(2-2t-4)^2+(3+t-2)^2=9$$
$$(2t+2)^2+(-2t-2)^2+(t+1)^2=9$$
$$4(t+1)^2+4(t+1)^2+(t+1)^2=9$$
$$9(t+1)^2=9$$

គេទាញបាន $t_1=0\ , t_2=-2$ ។

–ចំពោះ $t=0$ នោះតាម(3)គេបាន $x=1,y=2,z=3$ ជាចំណុច A

–ចំពោះ $t=-2$ នោះតាម(3)គេបាន $x=-3,y=6,z=1$ ។

ដូចនេះ $B(-3,6,1)$ ។

កំណត់សមីការនៃប្លង់ (β) ដែលប៉ះស្វ៊ែ (S) ត្រង់ B ៖

ប្លង់ (β) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(2,-2,1)$ ។

ដូចនេះ $(\beta):2(x+3)-2(y-6)+(z-1)=0$

ឬ $(\beta):2x-2y+z+17=0$ ។

លំហាត់ទី៦

គេឲ្យបន្ទាត់ $(\Delta): \frac{x+4}{3}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+3}{4}$ និងស្វ៊ែ (S) មានសមីការ

$(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$ ។

ក-រកកូអរដោនេចំណុច A និង B ប្រសព្វរវាង (Δ) និង (S) ។

ខ-រកសមីការប្លង់ (α) និង (β) ដែលប៉ះស្វ៊ែ (S) ត្រង់ A និង B ។

គ-កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (Δ') ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (α) និង (β) ខាងលើ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-រកកូអរដោនេចំណុច A និង B ប្រសព្វរវាង (Δ) និង (S) ៖

$$\begin{cases} \frac{x+4}{3}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+3}{4} & (\Delta) \\ x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0 & (S) \end{cases}$$

តាង $\frac{x+4}{3}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+3}{4}=t$ នោះ $\begin{cases} x=3t-4 \\ y=3t-2 \\ z=4t-3 \end{cases}$ (1)

យកសមីការ (1) ជួសក្នុងសមីការ (S) គេបាន ៖

$$(3t-4)^2+(3t-2)^2+(4t-3)^2-2(3t-4)-4(3t-2)-6(4t-3)+5=0$$

$$34t^2-102t+68=0$$

គេទាញឫស $t_1=1\ ;\ t_2=2$ ។

–ចំពោះ $t=1$ តាម(1)គេបាន $x=-1, y=1\ , z=1$ ។

–ចំពោះ $t=2$ តាម(2) គេបាន $x=2\ , y=4\ , z=5$ ។

ដូចនេះ $A(-1\ ,1\ ,1)$ និង $B(2\ ,4\ ,5)$ ។

ខ–រកសមីការប្លង់ (α)និង (β)ដែលប៉ះស្វ៊ែ(S)ត្រង់ A និង B៖

សមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែ (S)អាចសរសេរដូចខាងក្រោម ៖

$(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$ ។

គេបានកូអរដោនេនៃផ្ចិតស្វ៊ែ (S) គឺ $I(1\ ,2\ ,3)$ ។

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់(α)និង (β)ដែលប៉ះស្វ៊ែ(S)ត្រង់ A និង Bគឺ

$\overrightarrow{IA}=(-2,-1,-2)$ និង $\overrightarrow{IB}=(1,2,2)$ ។

សមីការនៃប្លង់ (α)និង (β)អាចសរសេរ ៖

$(\alpha):-2(x+1)-(y-1)-2(z-1)=0$ ឬ $(\alpha):2x+y+2z-1=0$

$(\beta):1.(x-2)+2(y-4)+2(z-5)=0$ ឬ $(\beta):x+2y+2z-20=0$ ។

គ–រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(Δ')ជាប្រសព្វរវាង(α) និង (β)

គេមាន $\begin{cases}2x+y+2z-1=0\\x+2y+2z-20=0\end{cases}$

យក $z=t\in IR$ គេបាន $\begin{cases}2x+y+2t-1=0\\x+2y+2t-20=0\end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន $\begin{cases}x=-6-\frac{2}{3}t\\y=13-\frac{2}{3}t\end{cases}$

ដូចនេះ $(\Delta'):\begin{cases}x=-6-\frac{2}{3}t\\y=13-\frac{2}{3}t\\z=t \qquad ,t\in IR\end{cases}$ ។

លំហាត់ទី៧

គេឲ្យបន្ទាត់ $(d): \frac{x-3}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{-1}$ និងស្វ៊ែ (S) មានសមីការ

ទូទៅ $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$ ។

ក–កំណត់កូអរដោនេផ្ចិត I និង កាំ R របស់ស្វ៊ែ (S) ។

ខ–តាង A ជាចំណោលកែងនៃ I លើបន្ទាត់ (d) ។ រកកូអរដោនេ

នៃចំណុចA ។គណនា IA រួចទាញថាបន្ទាត់(d)ប៉ះនឹងស្វ៊ែ(S) ។

គ–កំណត់សមីការប្លង់កែងនឹងបន្ទាត់(d) ហើយប៉ះនឹងស្វ៊ែ(S) ។

ដំណោះស្រាយ

ក–កំណត់កូអរដោនេផ្ចិត I និង កាំ R របស់ស្វ៊ែ (S) ៖

សមីការ$(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$ អាចសរសេរ ៖

$(S): (x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$ ។

ដូចនេះកូអរដោនេនៃផ្ចិតស្វ៊ែគឺ $I(2,-1,1)$ និងកាំ $R=3$ ។

ខ- រកកូអរដោនេនៃចំណុច A ៖

តាង $A(x_A, y_A, z_A)$ ។

ដោយ $A \in (d)$ នោះកូអរដោនេ A ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ (d) ។

គេបាន $\frac{x_A - 3}{2} = \frac{y_A - 3}{2} = \frac{z_A - 2}{-1} = t$ នោះ $\begin{cases} x_A = 3 + 2t \\ y_A = 3 + 2t \\ z_A = 2 - t \end{cases}$ (1)

គេមាន $\overrightarrow{IA} = (1 + 2t , 4 + 2t , 1 - t)$ ។

បន្ទាត់ (d) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (2, 2, -1)$ ។

ដោយ $\overrightarrow{IA} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} . \vec{u} = 0$

គេបាន $2(1 + 2t) + 2(4 + 2t) - (1 - t) = 0$

$$2 + 4t + 8 + 4t - 1 + t = 0$$

$$9t + 9 = 0$$

គេទាញ $t = -1$ យកជំនួសក្នុង(1)គេបាន $x_A = 1, y_A = 1 , z_A = 3$ ។

ដូចនេះ $A(1,1,3)$ ។

គណនា IA រួចទាញថាបន្ទាត់(d)ប៉ះនឹងស្វ៊ែ(S) ៖

គេបាន $IA=\sqrt{(1-2)^2+(1+1)^2+(3-1)^2}=3$ ។

ដោយ $IA=R=3$ ដូចនេះបន្ទាត់(d)ប៉ះនឹងស្វ៊ែ(S)ត្រង់ A ។

គ–កំណត់សមីការប្លង់កែងនឹងបន្ទាត់(d) ហើយប៉ះនឹងស្វ៊ែ(S) ៖

តាង α ជាប្លង់កែងនឹងបន្ទាត់ (d) នោះ $\vec{u}=(2,2,-1)$ ជាវ៉ិចទ័រ

ណរម៉ាល់នៃប្លង់ α ។ សមីការប្លង់ α អាចសរសេរ

$(\alpha): 2x+2y-z+d=0$ ។ ដោយប្លង់ α ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) នោះគេបាន

$$d(I,\alpha)=R=3$$

$$\frac{|4-2-1+d|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=3$$

$$|1+d|=9$$

គេទាញបាន $d_1=8$ ឬ $d_2=-10$ ។

ដូចនេះសមីការប្លង់ដែលត្រូវរកគឺ ៖ $(\alpha_1): 2x+2y-z+8=0$ និង $(\alpha_2): 2x+2y-z-10=0$ ។

លំហាត់ទី៨

គេឲ្យបន្ទាត់ $(d): \frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+1}{4}$ និងប្លង់(α) មានសមីការ

$(\alpha): x+2y+2z-10=0$ ។

ក-កំណត់កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ A រវាង(d)និងប្លង់(α) ។

ខ-រកសមីការស្វ៊ែកាំ$R=3$ ហើយប៉ះនឹងប្លង់(α) ត្រង់ចំណុចA។

ដំណោះស្រាយ

ក-កំណត់កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ A រវាង(d)និងប្លង់(α)

$$\begin{cases} \frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+1}{4} & (d) \\ x+2y+2z-10=0 & (\alpha) \end{cases}$$

តាង $\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+1}{4}=t$ នោះ $\begin{cases} x=3t-1 \\ y=-2t+3 \quad (1) \\ z=4t-1 \end{cases}$

យក (1) ជួសក្នុង (α) គេបាន ៖

$$(3t-1)+2(-2t+3)+2(4t-1)-10=0$$
$$3t-1-4t+6+8t-2-10=0$$
$$7t-7=0$$

គេទាញបាន $t=1$ យកជួសក្នុង (1) គេបាន $x=2,y=1,z=3$

ដូចនេះ $A(2,1,3)$ ។

ខ–រកសមីការស្វ៊ែកាំ $R=3$ ហើយប៉ះនឹងប្លង់ (α) ត្រង់ចំណុច A ៖

តាង $I(a,b,c)$ ជាផ្ចិតរបស់របស់ស្វ៊ែ (S) ដែលត្រូវរក ។

សមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែអាចសរសេរ ៖

$$(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2=9$$

ដោយ (S) ប៉ះប្លង់ (α) ត្រង់ A នោះគេបាន $\overrightarrow{AI}//\vec{n}$ ។

គេមាន $\overrightarrow{AI}=(a-2,b-1,c-3)$ និង $\vec{n}=(1,2,2)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់

នៃប្លង់ (α) ។

ដោយ $\overrightarrow{AI}//\vec{n}$ នោះ $\overrightarrow{AI}=t.\vec{n}$

គេទាញ $\begin{cases} a-2=t \\ b-1=2t \\ c-3=2t \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} a=t+2 \\ b=2t+1 \\ c=2t+3 \end{cases}$ (2)

ហើយ $|\overrightarrow{AI}|=|t|.|\vec{n}|$ នោះ $|t|=\dfrac{|\overrightarrow{AI}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{R}{|\vec{n}|}=\dfrac{3}{\sqrt{1+4+4}}=1$

គេទាញ $t_1=-1\,;t_2=1$ ។

–ចំពោះ $t=-1$ តាម (2) គេបាន $a=1,b=-1,c=1$

ដូចនេះ $(S_1):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$ ។

–ចំពោះ $t=1$ តាម(2)គេបាន $a=3,b=3,c=5$

ដូចនេះ $(S_2):(x-3)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=9$ ។

លំហាត់ទី៩

គេឲ្យប្លង់ពីរ $(\alpha): x+2y+2z-11=0$ និង $(\beta): 2x-2y+z-1=0$

និងបន្ទាត់ $(\Delta): x=3+t\ , y=6-4t\ , z=7-t$ ដែល $t\in IR$

ក–គណនាកូអរដោណេចំណុចប្រសព្វ **A** និង **B** រវាងបន្ទាត់ (Δ)

ជាមួយប្លង់ (α) និង (β) រៀងគ្នា ។

ខ–យក **C** ជាចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x=1$ ហើយស្ថិតនៅក្នុងប្លង់

(α) និង (β) ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច **C** រួចរក្រុបភេទនៃ ΔABC

គ–កំណត់សមីការស្វ៊ែ **(S)** មានផ្ចិតនៅលើបន្ទាត់ (Δ) ហើយប៉ះ

រួមទៅនឹងប្លង់ (α) និង (β) ។

ដំណោះស្រាយ

ក–គណនាកូអរដោណេចំណុចប្រសព្វ **A** និង **B** ៖

យកសមីការ (Δ) ជួសក្នុងសមីការ (α) គេបាន៖

$(3+t)+2(6-4t)+2(7-t)-11=0$

$3+t+12-8t+14-2t-11=0$

$-9t+18=0 \Rightarrow t=2$

យក $t=2$ ជួសក្នុង (Δ) គេបាន $x=5, y=-2, z=5$ ។

ដូចនេះ $A(5,-2,5)$ ។

យកសមីការ (Δ) ជួសក្នុងសមីការ (β) គេបាន៖

$2(3+t)-2(6-4t)+(7-t)-1=0$

$6+2t-12+8t+7-t-1=0$

$9t=0 \Rightarrow t=0$

យក $t=0$ ជួសក្នុង (Δ) គេបាន $x=3, y=6, z=7$ ។

ដូចនេះ $B(3,6,7)$ ។

ខ-រកកូអរដោនេនៃចំណុច C រួចរកប្រភេទនៃ ΔABC

ចំពោះ $x=1$ គេបាន $\begin{cases}1+2y+2z-11=0\\2-2y+z-1=0\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}2y+2z-10=0\\-2y+z+1=0\end{cases}$

គេទាញបាន $y=2, z=3$ ។ ដូចនេះ $C(1,2,3)$ ។

គេមាន $\overrightarrow{CA}=(4,-4,2)\;;\;\overrightarrow{CB}=(2,4,4)$

គេបាន $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=8-16+8=0\Leftrightarrow \overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$

ហើយ $|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{16+16+4}=6\;;|\overrightarrow{CB}|=\sqrt{4+16+16}=6$

គេទាញបាន $CA=CB=6$ ។

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាតកំពូល C ។

គ–កំណត់សមីការស្វ៊ែ (S) ៖

តាង $I(a,b,c)$ ជាផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិតនៅលើបន្ទាត់ (Δ)

ហើយប៉ះរួមទៅនឹងប្លង់ (α) និង (β) ។

គេបាន $\begin{cases} a=3+t \\ b=6-4t \quad (1) \\ c=7-t \end{cases}$

ហើយ $R=d(I,\alpha)=d(I,\beta)$

$$\frac{|(3+t)+2(6-4t)+2(7-t)-11|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{|2(3+t)-2(6-4t)+(7-t)-1|}{\sqrt{4+4+1}}$$

ឬ $\frac{|-9t+18|}{3}=\frac{|9t|}{3} \Rightarrow t=1$ យកជួសក្នុង (1) គេបាន $\begin{cases} a=4 \\ b=2 \\ c=6 \end{cases}$

ហើយ $R=\frac{9}{3}=3$ ។ ដូចនេះសមីការស្តង់ដានៃសមីការស្វ៊ែសរសេរ

$(S):(x-4)^2+(y-2)^2+(z-6)^2=9$ ។

លំហាត់ទី១០

គេឲ្យបន្ទាត់ពីរ (d_1) និង (d_2) មានសមីការឆ្លុះរៀងគ្នា ៖

$(d_1): \frac{x-5}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2}$ និង $(d_2): \frac{x-6}{-4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{3}$

A ជាចំណុចមួយនៃ (d_1)មានអាប់ស៊ីស $x_A = 1$ ហើយ B ជាចំណុចមួយនៃ (d_2) មានអាប់ស៊ីស $x_B = t$ ដែល $t \in IR$ ។

ក-ចូរស្រាយថា $AB = \frac{\sqrt{26(t-2)^2 + 144}}{4}$

ខ-កំណត់តម្លៃ t ដើម្បីឲ្យ (AB) មានតម្លៃអប្បបរមា ។

គ-ចំពោះតម្លៃ t ដែលបានរកឃើញខាងលើ ចូរបង្ហាញថា (AB) ជាបន្ទាត់កែងរួមរវាងបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2) រួចទាញរកចម្ងាយរវាងបន្ទាត់(d_1) និង (d_2) ។

ដំណោះស្រាយ

ក-ស្រាយថា $AB = \frac{\sqrt{26(t-2)^2 + 144}}{4}$

គេមាន $A\in(d_1)$ ដែល $x_A=1$ នោះ $\frac{1-5}{-2}=\frac{y_A-1}{-1}=\frac{z_A+2}{2}$

គេទាញបាន $y_A=-1\,,z_A=2$ នោះ $A(1,-1\,,2)$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $B\in(d_2)$ ដែល $x_B=t$ នោះ $\frac{t-6}{-4}=\frac{y_B-2}{-1}=\frac{z_B-1}{3}$

គេទាញបាន $y_B=\frac{t+2}{4}, z_B=\frac{22-3t}{4}$ នោះ $B(\,t\,,\frac{t+2}{4}\,,\frac{22-3t}{4})$ ។

គេបាន $\overrightarrow{AB}=(t-1\,,\frac{t+6}{4}\,,\frac{14-3t}{4})$

ហេតុនេះ $AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(t-1)^2+\frac{(t+6)^2}{16}+\frac{(14-3t)^2}{16}}$

ដូចនេះ $AB=\frac{\sqrt{26t^2-104t+248}}{4}=\frac{\sqrt{26(t-2)^2+144}}{4}$ ។

ខ–កំណត់តម្លៃ t ដើម្បីឲ្យ AB មានតម្លៃអប្បបរមា ៖

គេមាន $AB=\frac{\sqrt{26(t-2)^2+144}}{4}$ (សម្រាយខាងលើ)

ដើម្បីឲ្យ AB មានតម្លៃអប្បបរមាលុះត្រាតែ $t-2=0$ ឬ $t=2$

ដូចនេះ $t=2$ ។

គ– បង្ហាញថា (AB)ជាបន្ទាត់កែងរួមរវាងបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2) ៖

ចំពោះ $t=2$ គេបាន $B(2,1,4)$ និង $\overrightarrow{AB}=(1,2,2)$ ។

តាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2) ។

គេបាន $\vec{u}=(-2,-1,2)$ និង $\vec{v}=(-4,-1,3)$ ។

គេមាន $\overrightarrow{AB}.\vec{u}=-2-2+4=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\perp\vec{u}$ ។

ហើយ $\overrightarrow{AB}.\vec{v}=-4-2+6=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\perp\vec{v}$ នោះ $(AB)\perp(d_2)$ ។

ដូចនេះ(AB)ជាបន្ទាត់កែងរួមរវាងបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2) ។

ទាញរកចម្ងាយរវាងបន្ទាត់(d_1) និង (d_2) ៖

ដោយ (AB)ជាបន្ទាត់កែងរួមរវាងបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2) នោះ AB ជាចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2) ។

ដូចនេះ $d(d_1,d_2)=AB=\sqrt{1+4+4}=3$ ។

លំហាត់ទី១១

គេឲ្យបន្ទាត់ពីរ (d_1) និង (d_2) មានសមីការឆ្លុះរៀងគ្នា ៖

$$(d_1): x-2=\frac{y-4}{2}=\frac{z-5}{2} \quad \text{និង} \quad (d_2): \frac{x-3}{-1}=y=\frac{z-4}{4}$$

ចូររកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់កែងរួមរវាងបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2)

ដំណោះស្រាយ

រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់កែងរួមរវាងបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2) ៖

តាង $A(x_A, y_A, z_A) \in (d_1)$ និង $B(x_B, y_B, z_B) \in (d_2)$

គេបាន $\begin{cases} x_A-2=\dfrac{y_A-4}{2}=\dfrac{z_A-5}{2}=p \\ \dfrac{x_B-3}{-1}=y_B=\dfrac{z_B-4}{4}=q \end{cases}$

នោះ $\begin{cases} x_A=p+2 \\ y_A=2p+4 \\ z_A=2p+5 \end{cases}$ (1) និង $\begin{cases} x_B=-q+3 \\ y_B=q \\ z_B=4q+4 \end{cases}$ (2)

គេបាន $\overrightarrow{AB}=(-q-p+1\ , q-2p-4\ , 4q-2p-1\ )$

តាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2) ។

គេបាន $\vec{u}=(1\,,2\,,2)$ និង $\vec{v}=(-1\,,1\,,4)$ ។

ដើម្បីឲ្យ (AB) ជាបន្ទាត់កែងរួមរវាងបន្ទាត់(d_1) និង (d_2)

លុះត្រាតែ $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\vec{u}\\ \overrightarrow{AB}\perp\vec{v}\end{cases}$ សមមូល $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\vec{u}=0\\ \overrightarrow{AB}.\vec{v}=0\end{cases}$

សមមូល $\begin{cases}-q-p+1+2q-4p-8+8q-4p-2=0\\ q+p-1+q-2p-4+16q-8p-4=0\end{cases}$

សមមូល $\begin{cases}9q-9p-9=0\\ 18q-9p-9=0\end{cases}$ នាំឲ្យ $p=-1\,,q=0$ ។

យក $p=-1\,,q=0$ ជួសក្នុង (1) និង (2) គេបាន ៖

$A(1,2,3)$ និង $B(3\,,0\,,4)$ ហើយគេបាន $\overrightarrow{AB}=(2\,,-2\,,1)$

ដូចនេះ $(AB):\begin{cases}x=1+2t\\ y=2-2t\quad;\ t\in IR\\ z=3+t\end{cases}$ ។

លំហាត់ទី១២

នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មួយ

គេឲ្យមានចំណុច $A(-1,4,4)\,;B(1,2,3)$ និង $C(3,2,4)$ ។

ក-គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចទាញថាបីចំណុច A,B,C

រត់មិនត្រង់គ្នា។ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

ខ-កំណត់សមីការប្លង់ (ABC) ។

គ-គណនាមាឌនៃចតុមុខ $OABC$ រួចទាញរកចម្ងាយពីចំណុច O

ទៅប្លង់ (ABC) ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ៖

គេមាន $\overrightarrow{AB}=(2\,,-2\,,-1)$ និង $\overrightarrow{AC}=(4\,,-2\,,0)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -2 & -1\\ 4 & -2 & 0\end{vmatrix}=-2\vec{i}-4\vec{j}+4\vec{k}$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-2,-4,4)$ ។

ទាញថាបីចំណុច A,B,C រត់មិនត្រង់គ្នា៖

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\neq\vec{O}$ នោះវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ មិនកូលីនេអ៊ែគ្នា

ដូចនេះ បីចំណុច A,B,C រត់មិនត្រង់គ្នា ។

គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ៖

តាមរូបមន្ត $S_{ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-2,-4,4)$ នោះ $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4+16+16}=6$

ដូចនេះ $S_{ABC}=\frac{1}{2}\times 6=3$ (ឯកតាផ្ទៃ) ។

ខ-កំណត់សមីការប្លង់ (ABC) ៖

ប្លង់ (ABC) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-2,-4,4)$

តាមរូបមន្ត $(ABC): a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

$$-2(x+1) - 4(y-4) + 4(z-4) = 0$$

ដូចនេះ $(ABC): -x - 2y + 2z - 1 = 0$ ។

គ–គណនាមាឌនៃចតុមុខ $OABC$ ៖

តាមរូបមន្ត $V_{OABC} = \dfrac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AO}\right|$

ដោយ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-2,-4,4)$ និង $\overrightarrow{AO} = (1,-4,-4)$

គេបាន $V_{OABC} = \dfrac{1}{6}|(-2)(1) + (-4)(-4) + (4)(-4)| = \dfrac{1}{3}$

ដូចនេះ $V_{OABC} = \dfrac{1}{3}$ (ឯកតាមាឌ) ។

ទាញរកចម្ងាយពីចំណុច O ទៅប្លង់ (ABC) ៖

តាមរូបមន្ត $V_{OABC} = \dfrac{1}{3} S_{ABC} \times h$ ដែល $h = d(o,(ABC))$

គេទាញបាន $\mathbf{d(o,(ABC))=\frac{3V_{OABC}}{S_{ABC}}=\frac{3\times\frac{1}{3}}{3}=\frac{1}{3}}$

ដូចនេះចម្ងាយពី $\mathbf{O}$ ទៅប្លង់ $\mathbf{(ABC)}$ ស្មើនឹង $\mathbf{\frac{1}{3}}$(ឯកតាប្រវែង) ។

លំហាត់ទី១៣

នៅក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មួយ

គេឲ្យមានចំណុច $A(0,2,1),B(2,1,-1),C(-4,5,3)$ និង $D(4,6,3)$ ។

ក–ចូរស្រាយថា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃ ΔABC ។

ខ–កំណត់សមីការប្លង់ (ABC) ។

គ–គណនា $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}$ រួចទាញរកមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ ។

ឃ–ទាញរកចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (ABC) ។

ដំណោះស្រាយ

ក–ស្រាយថា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃ ΔABC ៖

គេមាន $\overrightarrow{AB}=(2,-1,-2),\overrightarrow{AC}=(-4,3,2)$ និង $\overrightarrow{AD}=(4,4,2)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & -2\\ -4 & 3 & 2\end{vmatrix}=4\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}=(4,4,2)$ ។

ខ–កំណត់សមីការប្លង់ (ABC) ៖

ប្លង់ (ABC) មានវ៉ិចទ័ណរម៉ាល់ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(4,4,2)$

តាមរូបមន្ត $(ABC): a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

$$4(x-0)+4(y-2)+2(z-1)=0$$

ដូចនេះ $(ABC): 2x+2y+z-5=0$ ។

គ–គណនា $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}$ រួចទាញរកមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ ៖

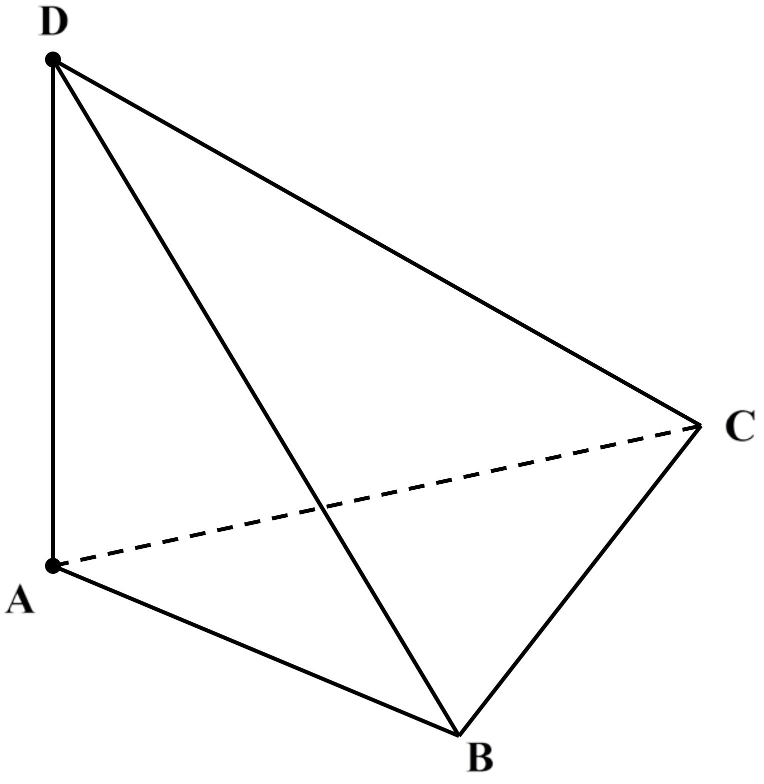
គេមាន $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ (តាមសម្រាយខាងលើ)

ដូចនេះ $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AD}|^2=16+16+4=36$ ។

តាមរូបមន្ត $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}\times 36=6$ (ឯកតាមាឌ) ។

ដូចនេះ $V_{ABCD}=6$ (ឯកតាមាឌ) ។

ឃ–ទាញរកចម្ងាយពីចំណុច **D** ទៅប្លង់ **(ABC)** ៖



គេមាន $V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \times d(D,(ABC))$

ដែល $d(D,(ABC)) = h$ ជាកម្ពស់នៃតេត្រាអ៊ែតគូសពីកំពូល **D** ។

គេទាញ $d(D,(ABC)) = \frac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}} = \frac{3\times 6}{3} = 6$ (ឯកតាប្រវែង) ។

លំហាត់ទី១៤

នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មួយ

គេឲ្យមានចំណុច $A(2,2,1), B(3,1,1), C(-2,4,5)$ និង $D(1,-1,0)$ ។

ក-គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}$ រួចទាញថាបីចំណុច A,B,C មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃ ΔABC ។

ខ-កំណត់សមីការប្លង់ (ABC) ។

គ-គណនា $(\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}).\overrightarrow{BD}$ រួចទាញរកមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ ។

ឃ-ទាញរកចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (ABC) ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}$

គេមាន $\overrightarrow{BA}=(-1,1,0)$, $\overrightarrow{BC}=(-5,3,4)$

គេបាន $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & 0\\ -5 & 3 & 4\end{vmatrix}=4\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$

ដូចនេះ $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=(4,4,2)$ ។

ដោយ $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=(4,4,2)\neq\vec{O}=(0,0,0)$ នោះ $\overrightarrow{BA}$ និង $\overrightarrow{BA}$ ជាវ៉ិចទ័រ

មិនកូលីនេអ៊ែគ្នា ។

ដូចនេះបីចំណុច A,B,C មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។

គណនាផ្ទៃក្រលានៃ ΔABC ៖

គេបាន $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{16+16+4}=3$ (ឯកតាផ្ទៃ) ។

ខ-កំណត់សមីការប្លង់ (ABC) ៖

ប្លង់ (ABC) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=(4,4,2)$

តាមរូបមន្ត $(ABC): a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

$$4(x-2)+4(y-2)+2(z-1)=0$$
$$4x-8+4y-8+2z-2=0$$
$$4x+4y+2z-18=0$$

ដូចនេះ $(ABC): 2x+2y+z-9=0$ ។

គ-គណនា $(\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}).\overrightarrow{BD}$ រួចទាញរកមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត ABCD ៖

គេមាន $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=(4,4,2)$ និង $\overrightarrow{BD}=(-2\,,-2\,,-1)$

ដូចនេះ $(\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}).\overrightarrow{BD}=-8-8-2=-18$ ។

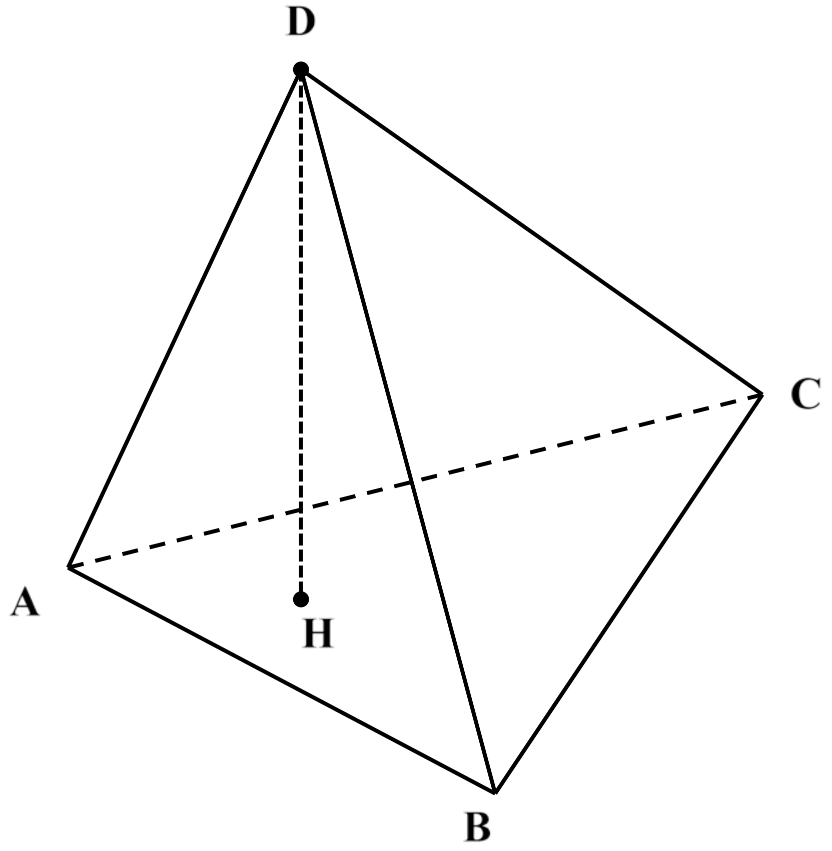
តាមរូបមន្ត $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}).\overrightarrow{BD}\right|$

ដោយ $(\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}).\overrightarrow{BD}=-8-8-2=-18$

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}).\overrightarrow{BD}\right|=\frac{1}{6}\times|-18|=3$$

ដូចនេះ $V_{ABCD}=3$ (ឯកតាមាឌ) ។

ឃ– ទាញរកចម្ងាយពីចំណុច **D** ទៅប្លង់ **(ABC)** ៖



គេមាន $V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \times d(D,(ABC))$

ដែល $d(D,(ABC)) = DH = h$ ជាកម្ពស់នៃតេត្រាអ៊ែតគូសពីកំពូល **D**

គេទាញ $d(D,(ABC)) = \frac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}} = \frac{3\times 3}{3} = 3$ (ឯកតាប្រវែង) ។

លំហាត់ទី១៥

គេឲ្យប្លង់ **(P)** កាត់តាមចំណុច $\mathbf{A(4,-2,2)}$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់

$\vec{\mathbf{n}}=(1,2,2)$ ហើយបន្ទាត់ $(\mathbf{L}):\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-4}{4}=z-2$ ។

ក-កំណត់សមីការនៃប្លង់**(P)** រួចគណនាកូអរដោនេចំណុច **M**

ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ **(L)** និងប្លង់**(P)** ។

ខ-យក**B,C,D**ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ **(P)**ជាមួយអក្ស **(ox),(oy),(oz)** រៀងគ្នា ។ ចូរស្រាយថាចតុកោណ **ABCD** ជាប្រលេឡូក្រាម

រួចគណនាផ្ទៃក្រលារបស់វា ។

គ-គេឲ្យ $\mathbf{S(2,-6,-2)}$ ។ បង្ហាញថាបន្ទាត់ **(SA)**អរតូកូណាល់នឹង

ប្លង់ **(ABCD)** ។ គណនារង្វាស់ **SA** រួចទាញរកមាឌនៃពីរ៉ាមីត

SABCD ។

ដំណោះស្រាយ

ក-កំណត់សមីការនៃប្លង់(P)៖

តាមរូបមន្ត $(P): a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

ដោយ $A(4,-2,2)$ និង $\vec{n}=(1,2,2)$

គេបាន $1.(x-4)+2(y+2)+2(z-2)=0$

$$x-4+2y+4+2z-4=0$$

ដូចនេះ $(P): x+2y+2z-4=0$ ។

គណនាកូអរដោនេចំណុច M ៖

តាង $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-4}{4}=z-2=t$ នាំឲ្យ $\begin{cases} x=-t+1 \\ y=4t+4 \quad (1) \\ z=t+2 \end{cases}$

យកសមីការ(1)ជំនួសក្នុង (P) គេបាន ៖

$(-t+1)+2(4t+4)+2(t+2)-4=0$

$$9t+9=0 \Rightarrow t=-1$$

យកតម្លៃ $t=-1$ ជួសក្នុង(1) គេបាន $\begin{cases} x=-(-1)+1=2 \\ y=4(-1)+4=0 \\ z=-1+2=1 \end{cases}$

ដូចនេះ $M(2\,,0\,,1)$ ។

ខ-ស្រាយថាចតុកោណ **ABCD** ជាប្រលេឡូក្រាម ៖

គេមាន $(P): x+2y+2z-4=0$

-បើ $y=0\,,z=0$ គេបាន $x-4=0$ នោះ $x=4$

-បើ $x=0\,,z=0$ គេបាន $2y-4=0$ នោះ $y=2$

-បើ $x=0\,,y=0$ គេបាន $2z-4=0$ នោះ $z=2$

គេបាន $B(4,0,0)\,,C(0,2,0),D(0,0,2)$ ។

ដោយ $A(4,-2,2)$ នោះ $\overrightarrow{AB}=(0,2,-2)$ និង $\overrightarrow{DC}=(0,2,-2)$

ដោយ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ នោះ **ABCD** ជាប្រលេឡូក្រាម ។

គណនាផ្ទៃក្រលានៃ **ABCD** ៖

តាមរូបមន្ត $S_{ABCD} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$

ដោយ $\overrightarrow{AB} = (0,2,-2)$, $\overrightarrow{AD} = (-4,2,0)$

គេបាន $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 8\vec{j} + 8\vec{k}$

$S_{ABCD} = \sqrt{4^2 + 8^2 + 8^2} = 12$ (ឯកតាផ្ទៃ) ។

គ-បង្ហាញថាបន្ទាត់ (SA)អរត្តូកូណាល់នឹងប្លង់ (ABCD) ៖

គេមាន $S(2,-6,-2)$ និង $A(4,-2,2)$, $B(4,0,0)$,$C(0,2,0)$

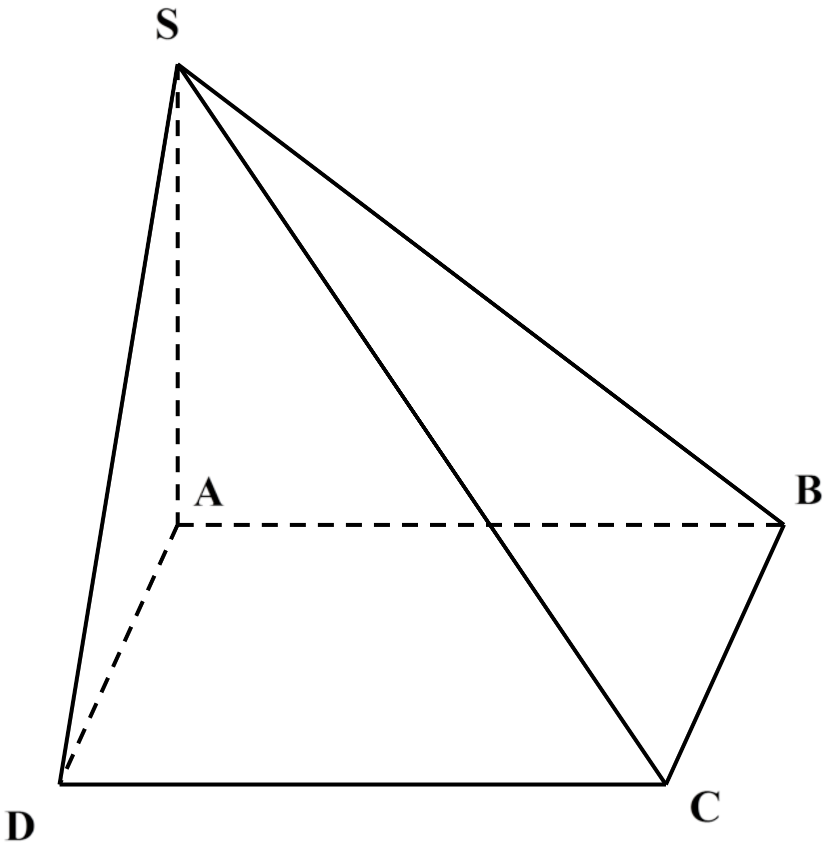
នោះ $\overrightarrow{SA} = (2,4,4)$, $\overrightarrow{AB} = (0,2,-2)$;$\overrightarrow{AC} = (-4,4,-2)$

គេបាន $\overrightarrow{SA} . \overrightarrow{AB} = 0 + 8 - 8 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{SA} \perp \overrightarrow{AB}$

ហើយ $\overrightarrow{SA} . \overrightarrow{AC} = -8 + 16 - 8 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{SA} \perp \overrightarrow{AC}$

ដូចនេះ(SA)អរត្តូកូណាល់នឹងប្លង់ (ABCD) ។

គណនារង្វាស់ SA រួចទាញរកមាឌនៃពីរ៉ាមីត SABCD ៖



គេបាន $SA = |\overrightarrow{SA}| = \sqrt{4+16+16} = 6$ ។

តាមរូបមន្ត $V_{SABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \times SA$ ដោយ $\begin{cases} SA = 6 \\ S_{ABCD} = 12 \end{cases}$

ដូចនេះ $V_{SABCD} = \frac{1}{3} \times 6 \times 12 = 24$ (ឯកតាមាឌ) ។

លំហាត់ទី១៦

ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

គេមានចំណុច $A(2,1,-1)$ និងប្លង់ពីរ (P) និង (Q) មាន

សមីការរៀងគ្នា $x+2y+2z-11=0$ និង $3x+y-4z+7=0$

ក-រកសមីការប្លង់(R) កាត់តាមចំណុច A ហើយកែងរួម

ទៅនឹងប្លង់ពីរ (P) និង (Q) ។

ខ-រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វBរវាងប្លង់ទាំងបី$(P),(Q),(R)$

គ-យក C ជាប្រសព្វរវាងប្លង់(R) ជាមួយនឹងអក្ស (oz) ។

រកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC រួចគណនាផ្ទៃក្រឡារបស់វា

ឃ-រកកូអរដោនេ D ដើម្បីឲ្យ $ABCD$ជាប្រលេឡូក្រាម ។

ង-តាងE ជាចំណុចកណ្តាលនៃ$[AB]$ និង Fជាចំណុច

កណ្តាលនៃ $[CD]$ ។ បង្ហាញថា $EAFC$ ជាការេ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-រកសមីការប្លង់(R) ៖

តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (R) ។

ប្លង់ $(P): x+2y+2z-11=0$ និង $(Q): 3x+y-4z+7=0$

មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់រៀងគ្នា $\vec{n_1}=(1,2,2)$ និង $\vec{n_1}=(3,1,-4)$

ដោយ(R) ជាប្លង់កែងរួមទៅនឹងប្លង់ពីរ (P) និង (Q)

នោះគេបាន $\vec{n}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 2\\ 3 & 1 & -4\end{vmatrix}=-10\vec{i}+10\vec{j}-5\vec{k}$

ដោយ $A(2,1,-1)\in(R)$នោះសមីការប្លង់ (R) អាចសរសេរ ៖

$$(R): -10(x-2)+10(y-1)-5(z+1)=0$$

$$(R): -10x+20+10y-10-5z-5=0$$

$$(R): -10x+10y-5z+5=0$$

ដូចនេះ $(R): -2x+2y-z+1=0$ ។

ខ-រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ B រវាងប្លង់ទាំងបី **(P),(Q),(R)** ៖

គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} x+2y+2z-11=0 \\ 3x+y-4z+7=0 \quad AF\perp CD \\ -2x+2y-z+1=0 \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបានចម្លើយ $x=1, y=2, z=3$

ដូចនេះចំណុចប្រសព្វនៃប្លង់ទាំងបីគឺ $B(1,2,3)$ ។

គ-រកប្រភេទនៃត្រីកោណ **ABC** រួចគណនាផ្ទៃក្រឡារបស់វា ៖

ដោយ **C** ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ **(R)** ជាមួយនឹងអក្ស័ **(oz)** នោះ

$x_c = y_c = 0$ និង $-z_c + 1 = 0$ ឬ $z_c = 1$ នោះ $C(0,0,1)$ ។

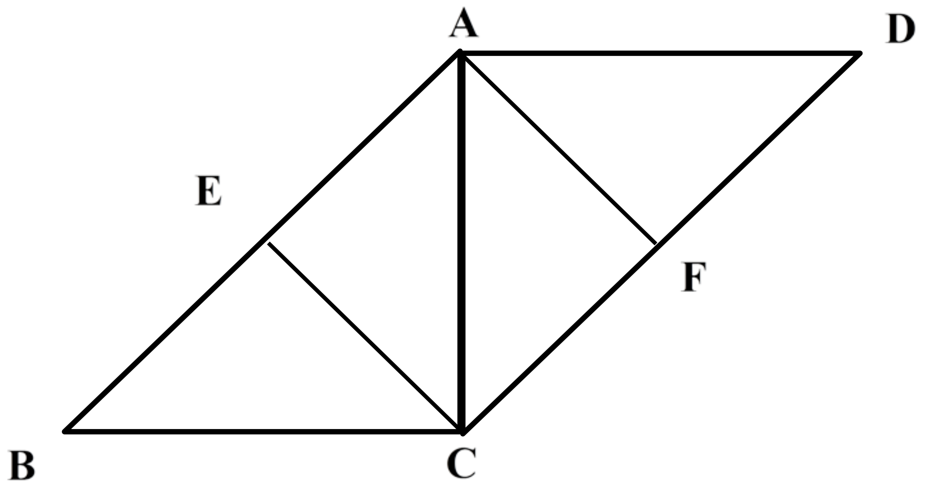
គេមាន $\overrightarrow{AB} = (-1,1,4)\,;\overrightarrow{AC} = (-2,-1,2)$ និង $\overrightarrow{BC} = (-1,-2,-2)$

គេបាន $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4+1+4} = 3\,, |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1+4+4} = 3$ នោះ $AC = BC$

ហើយ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = 2+2-4 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}$ ។

ដូចនេះ **ABC** ជាត្រីកោណកែងសមបាតកំពូល **C** ។

ឃ-រកកូអរដោនេ D ដើម្បីឲ្យ ABCD ជាប្រលេឡូក្រាម ៖



តាង $D(x_D, y_D, z_D)$ ។ បើ ABCD ជាប្រលេឡូក្រាមនោះគេបាន

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ដោយ $\begin{cases} \overrightarrow{AD} = (x_D - 2, y_D - 1, z_D + 1) \\ \overrightarrow{BC} = (-1, -2, -2) \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} x_D - 2 = -1 \\ y_D - 1 = -2 \\ z_D + 1 = -2 \end{cases}$ នាំឲ្យ $x_D = 1, y_D = -1, z_D = -3$ ។

ដូចនេះ $D(1, -1, -3)$ ។

លំហាត់ទី១៧

នៅក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន

គេឱ្យ $(L): \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+8}{3}$ និង $(P): x-2y-2z-14=0$ ។

ក-គណនាកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វ A រវាង (L) និង (P)

ខ-រកសមីការប្លង់ (Q) កាត់តាមបន្ទាត់ (L) ហើយកែងនឹងប្លង់ (P)

គ-សរសេរប្រពន្ធ័សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (d) ដែលជាប្រសព្វ រវាងប្លង់ (P) និង (Q) ។

ឃ-រកសមីការស្វ៊ែកាំ $R=6$ ហើយប៉ះនឹងប្លង់ (P) ត្រង់ចំនុច A ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វ A រវាង (L) និង (P)

កូអរដោនេនៃចំនុចប្រសព្វ A ជាចំលើយរបស់ប្រពន្ធ័សមីការ ៖

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+8}{3} \\ x-2y-2z-14=0 \end{cases}$$

ដោះស្រាយប្រពន្ធ័នេះគេបាន $A(4,-3,-2)$ ។

ខ-សរសេរសមីការប្លង់ (Q) កាត់តាមបន្ទាត់ (L)ហើយកែងនឹងប្លង់ (P)

យក $M(x,y,z)$ជាចំនុចទូទៅនៃប្លង់ (Q) គេបាន

$\overrightarrow{AM}(x-4, y+3, z+2)$

តាង $\vec{n}_Q$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (Q) នោះគេបាន $\vec{n}_Q = \vec{u} \times \overrightarrow{AM}$

ដែល $\vec{u} = (2,-2,3)$ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (L) ។

គេបាន $\vec{n}_Q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ x-4 & y+3 & z+2 \end{vmatrix}$

$$\vec{n}_Q = (-2z - 3y - 1\ )\vec{i} - (-2z - 3x + 1\ )\vec{j} + (2y + 2x + 1\ )\vec{k}$$ ។

ម៉្យាងទៀតដោយ $(Q) \perp (P)$នាំឱ្យ $\vec{n}_Q \perp \vec{n}_P$ សមមូល $\vec{n}_P . \vec{n}_Q = 0$

គេបាន

$$1.\left(-2z-3y-1\ \right)-2\left(-2z+33x-1\ \right)-2\left(2y+26x-2\right)=0$$

$$-2z-3y-1\ +4z-36x+3\ -4y-24x+4=0$$

$$-1\ x-7y0+2z+2\ =0\ \ 3$$

ដូចនេះ $(Q):1\ x+70y-2z-2\ =0$ ។

គ-សរសេរប្រព័ន្ធសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (d)

បន្ទាត់(d) ដែលជាប្រសព្វរវាង (P)និង (Q)មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស

$$\vec{u}_d=\vec{n}_P\times\vec{n}_Q$$

ដែល $\vec{n}_P=(1,-2,-2)$ និង $\vec{n}_Q=(1\ ,70,-2)$ ។

គេបាន $\vec{u}_d=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & -2\\ 1 & 07 & -2\end{vmatrix}=1\ \vec{i}\ 8\ 1\ \vec{j}\ 8\ 2\ \vec{k}$ ។

យក $N_0\in(d)$ នាំឱ្យ $N_0\in(P)$ និង $N_0\in(Q)$ ។

គេបាន $\begin{cases}x_0-2y_0-2z_0-1\ =40\\ 1\ x_0 0+7y_0-2z_0-2\ =30\end{cases}$

យកតម្លៃ $x_0 = 0$ នាំឱ្យ $y_0 = 1 \ , z_0 = -8$ ។

គេបាន $N_0(0,1,-8)$ ។

ដូចនេះសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (d) អាចសរសេរ ៖

$$(d): \begin{cases} x = 1\ 8 \\ y = 1 - 1\ 8 \\ z = -8 + 2\ 7 \ , t \in IR \end{cases}$$

លំហាត់ទី១៨

នៅក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន គេឱ្យប្លង់ពីរ:

$(P): x-2y+z+4=0$ និង $(Q): 2x+3y-2z-1=0$ ។

ក-សរសេរសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (L) ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និង (Q) ។

ខ-ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (R) កាត់តាមចំនុច $A(0,6,8)$ហើយកែងរួមទៅនឹងប្លង់

ទាំងពីរ (P) និង (Q) ខាងលើ ។

គ-គណនាកូអរដោនេនៃចំនុចប្រសព្វ M រវាងបន្ទាត់ (L)និង ប្លង់ (R) ។

ដំណោះស្រាយ

ក-សរសេរសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (L) ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និង (Q)

ប្លង់ (P) និង (Q) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់រៀងគ្នា

$\vec{n}_P = (1,-2,1)$ និង $\vec{n}_Q = (2,3,-2)$ ។

តាង $\vec{u}_L$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (L) នោះគេបាន ៖

$$\vec{u}_L = \vec{n}_P \times \vec{n}_Q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k} \quad ។$$

យក $M_0(x_0,y_0,z_0) \in (L)$ នាំឱ្យ $M_0 \in (P)$ និង $M_0 \in (Q)$

គេបាន $\begin{cases} x_0 - 2y_0 + z_0 + 4 = 0 \\ 2x_0 + 3y_0 - 2z_0 - 1 \;= 30 \end{cases}$

សន្មតយក $z_0 = 0$ នាំឱ្យគេទាញបាន $x_0 = 2 \ , y_0 = 3$ ។

ដូចនេះ $M_0(2,3,0)$ ។

ដូចនេះសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (L) អាចសរសេរតាមរូបមន្ត ៈ

$$(L): \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

ឬ $(L): \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{7}$ ។

ខ-សរសេរសមីការប្លង់ (R) ៖

តាង $\vec{n}_R$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (R)កាត់តាមចំនុច $A(0,6,8)$ ហើយកែងរួម

ទៅនឹងប្លង់ទាំងពីរ (P) និង (Q) ខាងលើ ។

គេមាន $(R)\perp(P)$និង $(R)\perp(Q)$

នាំឱ្យ $\vec{n}_R \perp \vec{n}_P$ និង $\vec{n}_R \perp \vec{n}_Q$ នាំឱ្យ $\vec{n}_R = \vec{n}_P \times \vec{n}_Q$

គេបាន $\vec{n}_R = \vec{n}_P \times \vec{n}_Q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}$ ។

សមីការប្លង់ (R)អាចសរសេរតាមរូបមន្ត ៖

$$(R): a(x-x_A) + b(y-y_A) + c(z-z_A) = 0$$

$$(R):1.(x-0)+4(y-6)+7(z-8)=0$$

ដូចនេះ $(R): x+4y+7z-8=0$ ។

គ-គណនាកូអរដោនេនៃចំនុចប្រសព្វ M រវាងបន្ទាត់ (L) និង ប្លង់ (R)

កូអរដោនេចំនុចចំនុចប្រសព្វ M រវាងបន្ទាត់ (L) និង ប្លង់ (R) ជាចំលើយប្រពន្ធ័សមីការៈ

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z}{7} & (1) \\ x+4y+7z-8=0 & (2) \end{cases}$$

តាង $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z}{7}=t$

នាំឱ្យ $\begin{cases} x=t+2 \\ y=4t+3 & (3) \\ z=7t \end{cases}$ យកទៅជួសក្នុងសមីការ (2)

គេបាន $t+2+4(4t+3)+7(7t)-8=0$

នាំឱ្យ $t=1$ យកជួសក្នុង (3) គេបាន $x = 3, y = 7, z = 7$ ។

ដូចនេះ $M(3,7,7)$ ។

លំហាត់ទី១៩

នៅក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន ។

គេឱ្យបន្ទាត់ $(L): \frac{x+3}{-3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-1}{3}$ និងចំនុច $A(2,-3,4)$ ។

ក-ចូរគណនាចំងាយពីចំនុច A ទៅបន្ទាត់ (L) ។

ខ-ចូរសរសេរសមីការប្លង់កំនត់ដោយបន្ទាត់ (L) និង ចំនុច A ។

គ-សរសេរសមីការប្លង់ (Q) កាត់តាមបន្ទាត់ (L) ហើយកែងនឹងប្លង់ (P) ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាចំងាយពីចំនុច A ទៅបន្ទាត់ (L)

បន្ទាត់ $(L): \frac{x+3}{-3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-1}{3}$

ជាបន្ទាត់កាត់តាមចំនុច $M_0(-3,4,1)$ ហើយមាន

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}_L(-3,4,3)$ ។

តាមរូបមន្ត $d(A,(L))=\dfrac{\left\|\overrightarrow{AM_0}\times\vec{u}_L\right\|}{\left\|\vec{u}_L\right\|}$ ដោយ $\overrightarrow{AM_0}(-5,7,-3)$

។

គេមាន $\overrightarrow{AM_0}\times\vec{u}_L=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -5 & 7 & -3\\ -3 & 4 & 3\end{vmatrix}=33\vec{i}+24\vec{j}+\vec{k}$

គេទាញ $\left\|\overrightarrow{AM_0}\times\vec{u}_L\right\|=\sqrt{(33)^2+(24)^2+1^2}=\sqrt{1666}$

ហើយ $\left\|\vec{u}_L\right\|=\sqrt{9+16+9}=\sqrt{34}$ ។

គេបាន $d(A,(L))=\dfrac{\sqrt{1666}}{\sqrt{34}}=\sqrt{\dfrac{1666}{34}}=\sqrt{49}=7$ ។

ដូចនេះ $d(A,(L))=7$ (ឯកត្តាប្រវែង) ។

ខ-សរសេរសមីការប្លង់កំនត់ដោយបន្ទាត់ (L) និង ចំនុច A

តាង $\vec{n}_P$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) គេបាន

$$\vec{n}_P = \vec{u}_L \times \overrightarrow{M_0A}$$

ដោយ $\vec{u}_L(-3,4,3)$ និង $\overrightarrow{M_0A}(5,-7,3)$ គេបាន ៖

$$\vec{n}_P = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & 3 \\ 5 & -7 & 3 \end{vmatrix} = 33\,\vec{i} - 24\,\vec{j} + \vec{k}$$ ។

សមីការប្លង់ (P) អាចសរសេរ ៖

$$(P): 33\,(x-2) - 24\,(y+3) + (z-4) = 0$$
$$(P): 33\,x - 24\,y + z - 142 = 0$$

គ-សរសេរសមីការប្លង់ (Q) កាត់តាមបន្ទាត់ (L) ហើយកែងនឹងប្លង់ (P)

តាង $\vec{n}_Q$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (Q) កាត់តាមបន្ទាត់ (L) ហើយកែងនឹងប្លង់ (P)។

យក $M(x,y,z)$ ជាចំនុចទូទៅនៃប្លង់ (Q) គេបាន

$\vec{n}_Q = \vec{u}_L \times \overrightarrow{M_0M}$ ។

ដោយ $\vec{u}_L(-3,4,3)$ និង $\overrightarrow{M_0M}(x+3, y-4, z-1)$ គេបាន ៖

$$\vec{n}_Q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & 3 \\ x+3 & y-4 & z-1 \end{vmatrix}$$

$$= (4z-3y+8)\vec{i} - (-3z-3x-1\ )\vec{j}2+(-3y-4x)\vec{k}$$

$\vec{n}_Q = (4z-3y+8, 3z+3x+1\ , -3y-2 4x)$ ។

ដោយ $(Q)\perp(P)$ នាំឱ្យ $\vec{n}_Q \perp \vec{n}_P$ សមមូល $\vec{n}_Q.\vec{n}_P = 0$ គេបាន ៖

$$3\ (4z3-3y+8) - 2\ (3z4-3x+6) + (-3y-4x) = 0$$

$$1\quad z-39\ y-2 2 9 2 \quad -6 7\ z-4 7\ x-2 1 \quad -4 3y-4 4x = 0$$

$$-7\ x-6 1 \quad y-0 6\ z-2 1 0 \quad = 2 0 \qquad 0$$

ដូចនេះ $(Q): 3\ x+5 8 y-3 1 z-6 0 = 0$ ។

លំហាត់ទី២០

នៅក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន ។

គេឱ្យបីចំនុច $A(-2,3,4)$,$B(-5,7,7)$ និង $C(7,7,3)$ ។

ក-គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។

ទាញថាបីចំនុច A,B,C រត់មិនត្រង់គ្នា ។

ខ-គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC ។

គ-សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) ។

ឃ-គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត $OABC$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

គេមាន $\overrightarrow{AB}=(-3,4,3)$ និង $\overrightarrow{AC}=(9,4,-1)$

គេបាន $\vec{n} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & 3 \\ 9 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -1\,\vec{i} + 62\,\vec{j} - 44\,\vec{k}$

ដោយ $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} \neq \vec{O}$ នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ ជាវ៉ិចទ័រមិនកូលីនេអ៊ែគ្នា ។

ដូចនេះបីចំនុច A, B, C រត់មិនត្រង់គ្នា ។

ខ-គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC

តាមរូបមន្ត $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right\|$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 + (62)^2 + (44)^2} = 28$$

ដូចនេះ $S_{ABC} = 2$ (ឯកត្តាក្រឡាផ្ទៃ)។

គ-សរសេរសមីការប្លង់ (ABC)

ប្លង់ (ABC) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់

$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-1,2,-4)$ ។

សមីការប្លង់ (ABC) អាចសរសេរ ៖

$(ABC): a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

$(ABC): -1(x+2)+2(y-3)-4(z-4)=0$

ដូចនេះ $(ABC): 2x-3y+6z-1=0$ ។

ឃ-គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត $OABC$

តាមរូបមន្ត $V_{OABC}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AO}\right|$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-1,2,-4)$ និង $\overrightarrow{AO}=(2,-3,-4)$

គេបាន $V_{OABC}=\frac{1}{6}\left|(-1)(2)+(2)(-3)+(-4)(-4)\right|=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

។

ដូចនេះ $V_{OABC}=\frac{4}{3}$ (ឯកត្តាមាឌ) ។

លំហាត់ទី២១

នៅក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ។

(គេយកឯកត្តា $1cm$ នៅលើអក្ស) គេឱ្យបន្ទាត់ពីរ $\left(L_1\right)$ និង $\left(L_2\right)$

មានសមីការឆ្លុះរៀងគ្នា

$$\left(L_1\right): \frac{x+5}{9} = \frac{y+4}{4} = \frac{z-3}{-1} \text{ និង } \left(L_2\right): \frac{x+1}{3} = \frac{y-7}{-4} = \frac{z+1}{-3} \text{ ។}$$

ក-ចូរសរសេរសមីការប្លង់ $\left(P\right)$ កាត់តាម $\left(L_1\right)$ ហើយស្របនឹង $\left(L_2\right)$ ។

ខ-ចូរសរសេរសមីការប្លង់ $\left(Q\right)$ កាត់តាម $\left(L_2\right)$ ហើយស្របនឹង $\left(L_1\right)$ ។

គ-គណនាចំងាយរវាងបន្ទាត់ $\left(L_1\right)$ និង $\left(L_2\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-សរសេរសមីការប្លង់ (P) កាត់តាម (L_1) ហើយស្របនឹង (L_2)

$$(L_1): \frac{x+5}{9} = \frac{y+4}{4} = \frac{z-3}{-1}$$

ជាបន្ទាត់កាត់តាម $A(-5,-4,3)$ ហើយស្របនឹង $\vec{u}_1(9,4,-1)$

$$(L_2): \frac{x+1}{3} = \frac{y-7}{-4} = \frac{z+1}{-3}$$

ជាបន្ទាត់កាត់តាម $B(-1,7,-1)$ ហើយស្របនឹង $\vec{u}_2(3,-4,-3)$

តាង $\vec{n}_P$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) កាត់តាម (L_1) ហើយស្រប នឹង (L_2)

គេបាន $\vec{n}_P = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 9 & 4 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \end{vmatrix} = -1\ \vec{i} + 62\ \vec{j} - 44\ \vec{k}$ ។

សមីការប្លង់ (P) កាត់តាម (L_1) ហើយស្របនឹង (L_2)អាចសរ សេរ ៖

$$(P): a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$(P): -1\ (x + 56) + 2\ (y + 44) - 4\ (z - 38) = 0$$

ដូចនេះ $(P): 2x - 3y + 6z - 2 = 0$ ។

ខ-សរសេរសមីការប្លង់ (Q) កាត់តាម (L_2) ហើយស្របនឹង (L_1)

តាង $\vec{n}_Q$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (Q) កាត់តាម (L_2) ហើយស្របនឹង (L_1)

គេបាន $\vec{n}_Q = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{n}_P = -1\ \vec{i} + 2\ \vec{j} - 4\ \vec{k}$ ។

សមីការប្លង់ (Q) អាចសរសេរតាមរូបមន្ត ៖

$$(Q): a(x - x_B) + b(y - y_B) + c(z - z_B) = 0$$
$$(Q): -1\ (x + 16) + 2\ (y - 7) - 4\ (z + 18) = 0$$

ដូចនេះ $(Q): 2x - 3y + 6z + 2 = 0$ ។

គ-គណនាចំងាយរវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2)

គេមាន $(L_1) \subset (P)$ ហើយ $(L_2) \subset (Q)$ ដែល $(P) // (Q)$

នោះគេទាញបាន $d((L_1),(L_2)) = d((P),(Q)) = d(A,(Q))$ (ព្រោះ $A \in (P)$)

$$d((L_1)\,(L_2)) = \frac{|2x_A - 3y_A + 6z_A + 2|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}}$$

$$d((L_1)\,(L_2)) = \frac{|2(-5) - 3(-4) + 6(3) + 2|}{7} = \frac{9}{7} = \frac{9}{7}$$

លំហាត់ទី២២

នៅក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មាន ឯកត្តា $1cm$

នៅលើអក្សរគេអោយប្លង់ $(P): x + 2y + 2z - 6 = 0$ ។

គេតាង A,B,C ជាចំនុចប្រសព្វរវាងប្លង់ (P)ជាមួយអក្ស
$(O\ ),(Ox\ ),(Oy\ )$ ។

ក. កំនត់កូអរដោនេនៃចំនុច A,B និង C រួចសង់ប្លង់(P)

ខ.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់(L)កាត់តាមគល់O ហើយកែង នឹងប្លង់
(P) ខាងលើ ។

គ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ រួចទាញរកក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ **ABC**។

ឃ. គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត **OABC** រួចទាញរកចំងាយពីគល់ **O** ទៅប្លង់ (ABC)

ដំណោះស្រាយ

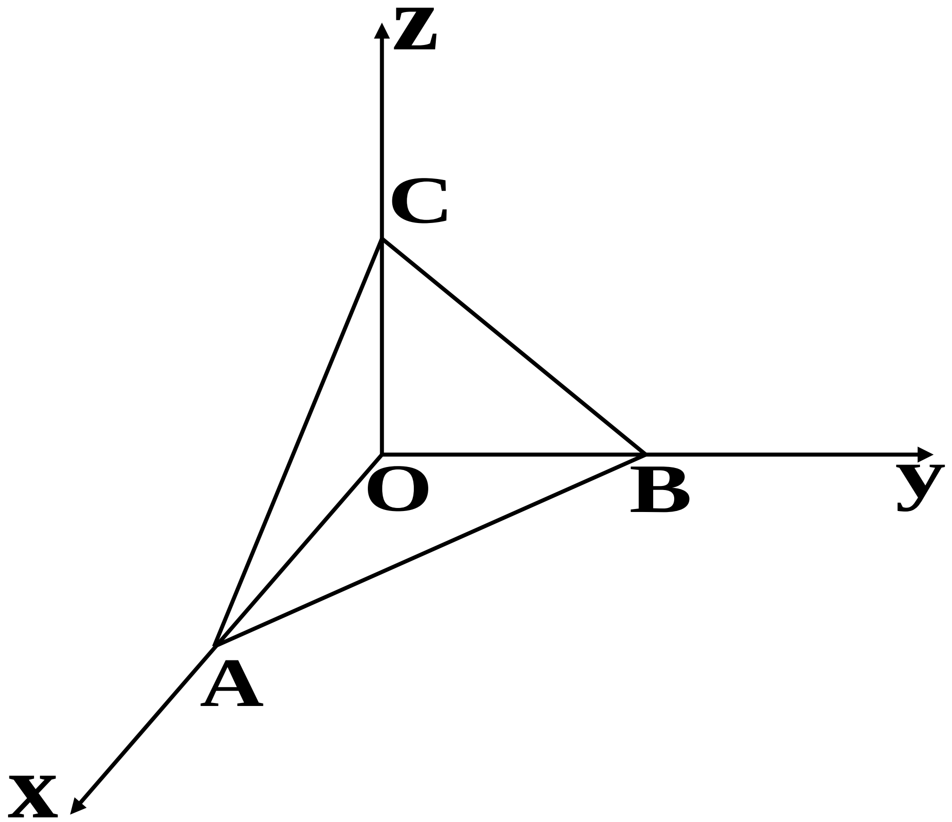
ក. កំនត់កូអរដោនេនៃចំនុច **A,B** និង **C** រួចសង់ប្លង់ (P)

គេមាន $(P): x+2y+2z-6=0$

បើ $y=0, z=0$ នាំអោយ $x-6=0$ ឬ $x=6$ ។ គេបាន $A(6,0,0)$ ។

បើ $x=0, z=0$ នាំអោយ $2y-6=0$ ឬ $y=3$ ។ គេបាន $B(0,3,0)$ ។

បើ $x=0, y=0$ នាំអោយ $2z-6=0$ ឬ $z=3$ ។ គេបាន $C(0,0,3)$ ។



ខ.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់(L)

តាមរូបមន្ត $(L):\begin{cases} x = x_O + a\ t \\ y = y_O + b\ t \\ z = z_O + c\ t\ ,t \in IR \end{cases}$

ដោយបន្ទាត់ (L) កែងនឹងប្លង់ $(P): x + 2y + 2z - 6 = 0$

នាំអោយវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរបស់បន្ទាត់។

គេបាន $\vec{u}_L = \vec{n}_P = (1,2,2)$ និង $O(0,0,0)$

ដូចនេះ $(L):\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 2t\ \ ,t \in IR \end{cases}$

គ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

គេមាន $\overrightarrow{AB} = (-6,3,0)$ និង $\overrightarrow{AC} = (-6,0,3)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & 3 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9\vec{i} + 18\vec{j} + 18\vec{k}$$ ។

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(9,1,18)$ ។

គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC ៖

តាមរូបមន្ត ៖ $S_{ABC}=\frac{1}{2}.\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|$

$$=\frac{1}{2}.\sqrt{9^2+1^2+18^2}=18,5cm^2$$

ឃ. គណនាមាឌតេត្រាអែត OABC ៖

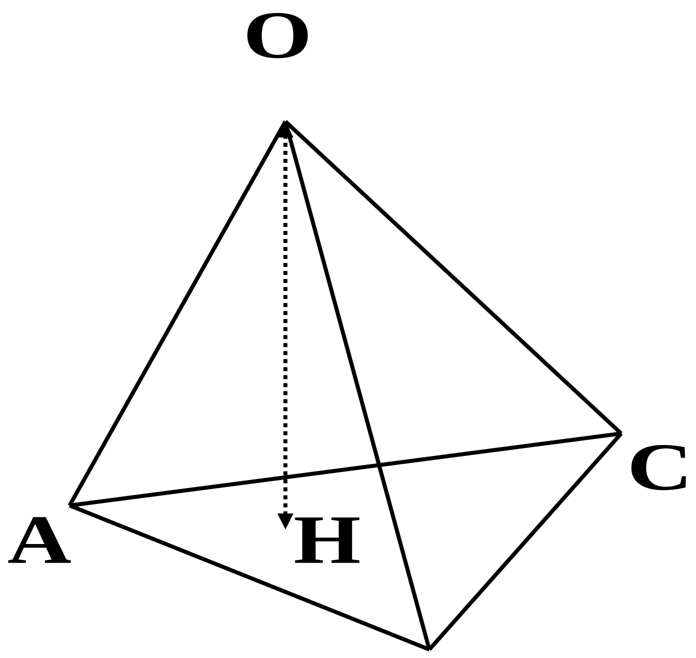
តាមរូបមន្ត ៖ $V_{OABC}=\frac{1}{6}.\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AO}\right|$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}(9,1,18)$ និង $\overrightarrow{AO}(-6,0,0)$

គេបាន $V_{OABC}=\frac{1}{6}.\left|-54+0+0\right|=9cm^3$

ដូចនេះ $\boxed{V_{OABC}=9cm^3}$ ។

ទាញរកចំងាយពីគល់ O ទៅប្លង់ (ABC) ៖



គេមាន $V_{OABC} = \frac{1}{3}.S_{ABC} \times d(O;ABC)$ ដែល $OH = d(o;ABC)$

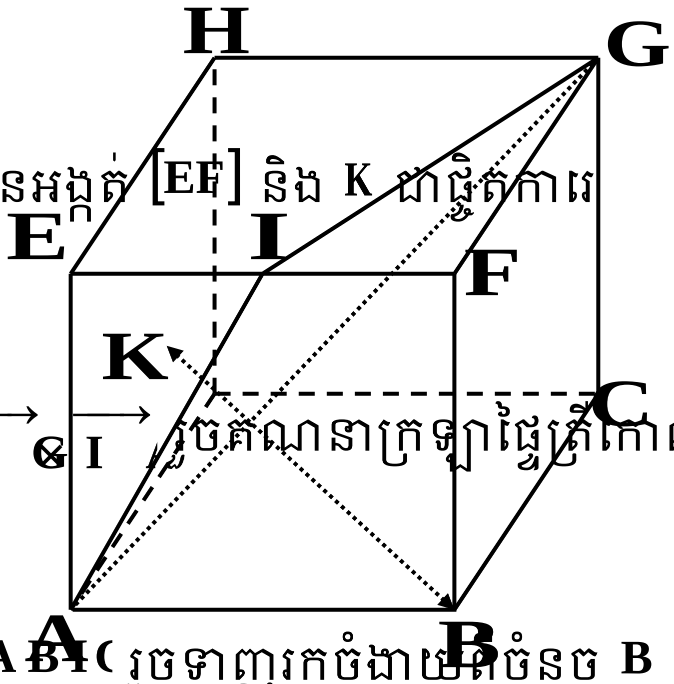
គេបាន $d(0,(ABC)) = \frac{3.V_{OABC}}{S_{ABC}} = \frac{3.9}{13,5} = 2cm$ ។

លំហាត់ទី២៣

គេអោយគូប A B C មួយមានទ្រនុងស្មើ1។

លំហមានទិសដៅតាមតំរុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន

$\left(A, \overrightarrow{A}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DA}\ E\right)$



គេយក I ជាចំនុចកណ្តាលនៃអង្កត់ [EF] និង K ជាផ្ចិតការេ ADH ។

ក. ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{KI} \times \overrightarrow{I}$ រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ IGA ។

ខ. គណនាមាឌតេត្រាអែត ABIC រួចទាញរកចំងាយពីចំនុច B ទៅប្លង់ (AIG)

ដំណោះស្រាយ

ក-ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\overrightarrow{B\quad} = \overrightarrow{KI\quad} \& \overrightarrow{I\quad A}$

ក្នុងលំហ $\left(A, \overrightarrow{A\quad}, \overrightarrow{BA\quad}, \overrightarrow{DA\quad} E\right)$

គេមាន ៖

$$A(0,0,0)\ ,B(1,0,0)\ ,C(1,1,0)\ ,D(0,1,0)$$

$$E(0,0,1)\ ,F(1,0,1)\ ,G(1,1,1)\ ,H(0,1,1)$$

ដោយ I ជាចំនុចកណ្តាលនៃអង្កត់ $[EF]$ គេបាន

$$I\left(\frac{0+1}{2},\frac{0+0}{2},\frac{1+1}{2}\right)$$

ឬ $I\left(\frac{1}{2},0,1\right)$ និង K ជាផ្ចិតការេ ADH នោះវាជាចំនុចកណ្តាលនៃអង្កត់ $[AH]$

គេបាន ៖

$K\left(\frac{0+0}{2},\frac{0+1}{2},\frac{0+1}{2}\right)$ ឬ $K\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ។

យើងបាន ៖ $\overrightarrow{BK}=\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ (1)

ហើយ $\overrightarrow{IG}=\left(\frac{1}{2},1,0\right)$, $\overrightarrow{IA}=\left(-\frac{1}{2},0,-1\right)$ គេបាន ៖

$$\overrightarrow{IG}\times\overrightarrow{IA}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{AB} & \overrightarrow{AD} & \overrightarrow{AE}\\ \frac{1}{2} & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & -1\end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{IG}\times\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}.\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}.\overrightarrow{AE}$$

គេបាន $\overrightarrow{IG}\times\overrightarrow{IA}=\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន ៖ $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{IG}\times\overrightarrow{IA}$ ។

គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ IGA :

តាមរូបមន្ត ៖ $S_{IAG}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{IG}\times\overrightarrow{IA}\right\|=\frac{1}{2}\cdot\left\|\overrightarrow{B}\right\|$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$ ឯកតាផ្ទៃ។

ខ. គណនាមាឌតេត្រាអែត ABIG ៖

តាមរូបមន្ត $V_{ABIG}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{IG}\times\overrightarrow{IA}\right)\cdot\overrightarrow{IB}\right|$

ដោយ $\overrightarrow{IB}=\left(\frac{1}{2},0,-1\right)$ និង $\overrightarrow{IG}\times\overrightarrow{IA}=\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

គេបាន ៖ $V_{ABIG}=\frac{1}{6}\cdot\left|-\frac{1}{2}+0-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{6}$ ឯកតាមាឌ ។

រកចំងាយពីចំនុច B ទៅប្លង់ (AIG) ៖

តាមរូបមន្ត ៖ $V_{ABIG}=\frac{1}{3}\cdot S_{IAG}\times d(B,(AIG))$

នាំអោយ $d(B,(AIG))=\frac{3V_{ABIG}}{S_{IAG}}$

ដូចនេះ $d(B,(AIG))=\dfrac{3.\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{6}}{4}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ ។

លំហាត់ទី២៤

ក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេអោយចំនុច ៖

$A(0,6,0)$,$B(0,4,2)$ និង $C(2,0,5)$។

ក. ចូរសង់ចតុមុខ OAB ។

ខ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC ។

គ.គណនា $\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right)\cdot\overrightarrow{OC}$ រួចទាញរកមាឌនៃចតុមុខ OAB ។

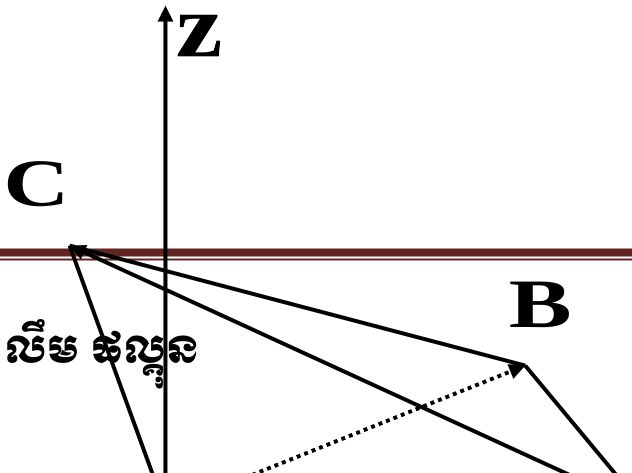
ឃ. ទាញរកចំងាយពីចំនុច O ទៅប្លង់ (ABC) ។

ង.សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. សង់ចតុមុខ OAB

$A(0,6,0)$, $B(0,4,2)$ និង $C(2,0,5)$



ខ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ ៖

គេមាន $\overrightarrow{AB} = (0,2,-2)$ និង $\overrightarrow{AC} = (2,-6,5)$

គេបាន $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -6 & 5 \end{vmatrix} = -2.\vec{i} - 4.\vec{j} - 4.\vec{k}$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-2,-4,-4)$ ។

គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC ៖

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}.\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+(-4)^2} = 3$$ ។

ដូចនេះ $S_{ABC} = 3$ ឯកតាផ្ទៃ ។

គ.គណនា $\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right)\overrightarrow{OC}$ ៖

គេមាន $\overrightarrow{OA}(0,6,0)$, $\overrightarrow{OB}(4,2,0)$, $\overrightarrow{OC}(2,0,5)$

គេបាន $$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 6 & 0\\ 4 & 2 & 0\end{vmatrix} = 0.\vec{i} - 0.\vec{j} - 24.\vec{k} = -24\vec{k}$$

ដូចនេះ $(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}).\overrightarrow{OC} = -24.5 = -120$ ។

ទាញរកមាឌនៃចតុមុខ $OABC$ ៖

តាមរូបមន្ត $V_{OABC} = \frac{1}{6}.\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right)\overrightarrow{OC}$

ដូចនេះ $V_{OABC}=\frac{1}{6}\times 12=2$ ឯកតាមាឌ។

ឃ. ទាញរកចំងាយពីចំនុច O ទៅប្លង់ (ABC) ៖

តាង $d(O,(ABC))$ ជាចំងាយពីចំនុច O ទៅប្លង់ (ABC) នាំឱ្យវាជាកំពស់

នៃ ចតុមុខ OAB

តាមរូបមន្ត $V_{OABC}=\frac{1}{3}.S_{ABC}\times d(O(ABC))$។

នាំឱ្យ $d(O,(ABC))=\frac{3.V_{OABC}}{S_{ABC}}=\frac{3.2}{3}=2$ ឯកត្តាប្រវែង។

ង.សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) :

តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័ណរម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC) នាំឱ្យ

$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}(-2,-4,-4)$

តាមរូបមន្ត $(ABC): a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

$$(ABC): -2(x-0)-4(y-6)-4(z-0)=0$$
$$(ABC): x+2y+2z-12=0$$

ដូចនេះ $(ABC): x - 2y + 2z - 1 = 0$ ។

លំហាត់ទី២៥

ក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេអោយចំនុច

$A(0,0,2)$,$B(2,0,1)$,$C(2,2,3)$ និង $D(0,2,4)$ ។

ក.ដៅចំនុច A,B,C និង D រួចបង្ហាញថាចតុកោណ ABC ជាប្រលេឡូក្រាម។

ខ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ គណនាក្រឡាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម ABC ។

គ.សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (L) កែងនឹងប្លង់

(ABC) ត្រង់ D ។

ឃ. កំនត់កូអរដោនេនៃចំនុច E បើគេដឹងថា $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)$ ។

ង. គណនាមាឌរបស់ព្រីសត្រង់ដែលមានកំពស់ $[AE]$ និងបាតជាចតុកោណ ABC

ដំណោះស្រាយ

ក.ដៅចំនុច A,B,C និង D រួចបង្ហាញថាចតុកោណ ABC ជាប្រលេឡូក្រាម ៖

$A(0,0,2)$,$B(2,0,1)$,$C(2,2,3)$ និង $D(0,2,4)$ ។

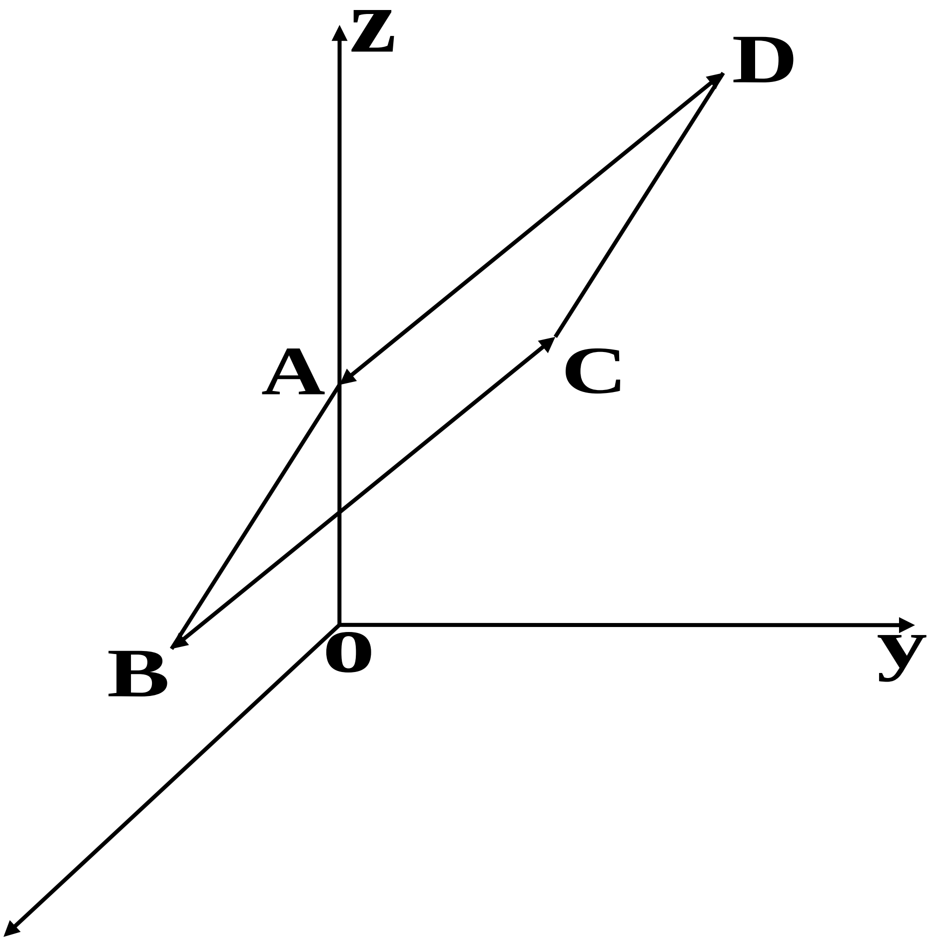
គេមាន $\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A\right)$

និង $\overrightarrow{CD}\left(x_D-x_C, y_D-y_C, z_D-z_C\right)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}=(2,0,-1)$ និង $\overrightarrow{DC}=(2,0,-1)$

ដោយ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ (កូអរដោនេដូចគ្នា)

ដូចនេះ ចតុកោណ ABC ជាប្រលេឡូក្រាម។



ខ.គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$ គណនាក្រឡាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម ABCD ៖

គេមាន $\overrightarrow{AB} = (2,0,-1)$ និង $\overrightarrow{AD} = (0,2,2)$

គេបាន $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2.\vec{i} - 4.\vec{j} + 4.\vec{k}$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (-2,-4,4)$ ។

តាមរូបមន្តក្រឡាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម ABCD ៖

$S_{ABCD} = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (4)^2} = 6$ (ឯកត្តាក្រឡាផ្ទៃ) ។

គ.សមីការប្លង់ (ABC) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ (L) កែងនឹងប្លង់ (ABC) ត្រង់ D

ដោយ ABC ជាប្រលេឡូក្រាមនោះបួនចំនុច A,B,C,D នៅក្នុងប្លង់តែមួយ។

តាង $\overrightarrow{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC) នោះគេបាន

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-2,-4,4)$$

សមីការប្លង់ (ABC) អាចសរសេរតាមរូបមន្ត ៖

$$(ABC): a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$
$$(ABC): -2(x - 0) - 4(y - 0) + 4(z - 4) = 0$$
$$(ABC): -2x - 4y + 4z - 16 = 0$$
$$(ABC): -x - 2y + 2z - 8 = 0$$

ម៉្យាងទៀតតាង $\overrightarrow{u}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃ (L) កែងនឹងប្លង់ (ABC) ត្រង់ D :

គេបាន $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-2,-4,4)$

តាមរូបមន្ត $(L):\begin{cases} x = x_D + a\ t \\ y = y_D + b\ t \\ z = z_D + c\ t\ , t \in I\!R \end{cases}$

ដូចនេះ $(L):\begin{cases} x = -2t \\ y = 2 - 4t \\ z = 4 + 4t\ \ , t \in I\!R \end{cases}$

ឃ. កំនត់កូអរដោនេនៃចំនុច E បើគេដឹងថា $\overrightarrow{A\quad} = E\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A\quad} \times \overrightarrow{BA}\right)$

តាង $E(x_E, y_E, z_E)$ ។ គេមាន $\overrightarrow{A\quad} = (x_E, y_E, z_E - 2)$

និង $\overrightarrow{A\quad} \times \overrightarrow{AB} = (-2, -4, 4)$

ដោយ $\overrightarrow{A\quad} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A\quad} \times \overrightarrow{BA}\right)$ E នាំឱ្យ $\begin{cases} x_E = -1 \\ y_E = -2 \\ z_E - 2 = 2 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x_E = -1 \\ y_E = -2 \\ z_E = 4 \end{cases}$

ដូចនេះ $E(-1, -2, 4)$ ។

លំហាត់ទី២៦

ក្នុងតំរុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

(គេយកឯកតា 1cm នៅលើអក្ស)។

គេឱ្យបីចំនុច $A(1,-2,3)$,$B(3,-1,3)$,$C(5,1,4)$ ។

ក-កំនត់កូអរដោនេវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ រួចកំនត់តំលៃកូស៊ីនូស

នៃមុំរវាងវ៉ិចទ័រពីរនេះ ។

ខ-គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ រួចទាញថាបីចំនុច A,B,C មិនរត់ត្រង់គ្នា ។

គ-គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC ។

ឃ-កំនត់សមីការប្លង់ (ABC) ។

ង-គណនាមាឌតេត្រាអែត ABC ទាញរកចំងាយពីចំនុច D ទៅប្លង់ (ABC)។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ក-កំនត់កូអរដោនេវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$

គេមាន $A(1,-2,3)$, $B(3,-1,3)$, $C(5,1,4)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}(2,1,0)$ និង $\overrightarrow{AC}(4,3,1)$ ។

កំនត់តំលៃកូស៊ីនូសនៃមុំរវាងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ ៖

តាមរូបមន្ត $\cos\theta = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

$$\cos\theta = \frac{8+3+0}{\sqrt{5}.\sqrt{26}} = \frac{11}{\sqrt{130}} = \frac{11\sqrt{130}}{130}$$

ខ-គណនាផលគុណនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ ទាញថាបីចំនុច A, B, C មិនរត់ត្រង់គ្នា

គេបាន $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 2.\vec{j} + 2.\vec{k}$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\left(1,-2,2\right)$ ។

ដោយ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ នាំឱ្យវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ មិនកូលីនេអ៊ែ គ្នា

នាំឱ្យ A, B, C មិនរត់ត្រង់គ្នា។

គ-គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}.\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{1+4+4} = \frac{3}{2} = 1,5$$ (ឯកតាផ្ទៃ)

។

ឃ-កំនត់សមីការប្លង់ (ABC)

តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់របស់ប្លង់ (ABC)

គេបាន $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left(1,-2,2\right)$

តាមរូបមន្ត $(ABC): a\left(x - x_A\right) + b\left(y - y_A\right) + c\left(z - z_A\right) = 0$

$$1.(x-1)-2(y+2)+2(z-3)=0$$
$$x-2y+2z-11=0$$

ដូចនេះ $(ABC): x-2y+2z-11=0$ ។

ង-គណនាមាឌតេត្រាអែត ABC

តាមរូបមន្ត $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\cdot\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right|$

ដោយ $A(1,-2,3), D(2,1,1)$ នាំឱ្យ $\overrightarrow{AD}=(1,3,-2)$

ហើយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(1,-2,2)$

គេបាន $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\cdot\left|1-6-4\right|=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}=1,5$ (ឯកតាមាឌ)។

ទាញរកចំងាយពីចំនុច D ទៅប្លង់ (ABC):

តាង h ជាកំពស់របស់តេត្រាអែត ABC ដែលគូសចេញពីកំពូល D ទៅប្លង់បាត

នាំឱ្យ $h = d(D,(ABC))$ ជាចំងាយពីចំនុច D ទៅប្លង់ (ABC)។

តាមរូបមន្ត $V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABC} \times h = \frac{1}{3}.S_{ABC} \times d(D,(ABC))$

នាំឱ្យ $d(D,(ABC)) = \frac{3.V_{ABCD}}{S_{ABC}} = \frac{3.1,5}{1,5} = 3$ (ឯកតាប្រវែង) ។

ជំពូកទី៤

លំហាត់អនុវត្តន៍

ជំពូកទី៥

សង្ខេបរូបមន្តសំខាន់ៗ