មេរៀនទី១ សមភាព វិសមភាពអាំងតេក្រាល សមីការអាំងតេក្រាល

១. សម្រាយបញ្ជាក់វិសមភាពអាំងតេក្រាល

ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាពអាំងតេក្រាលគេត្រូវប្រើលក្ខណ:ខាងក្រោម:

ក. បើ $f(x)\le g(x), \forall x\in[a,b] \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

ខ. បើ $m\le f(x)\le M \ , \forall x\in[a,b] \Leftrightarrow m(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

ឧទាហរណ៍:១. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\int_0^1 x(x-1)dx \le \frac{1}{4}$ ។

តាមវិសមភាព Cauchy $a>0, b>0 \Rightarrow \sqrt{ab}\le \frac{a+b}{2} \quad or \quad ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

គេបាន $x(x-1)\le\left(\frac{x+x-1}{2}\right)^2 \le \left(\frac{x+1-x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$\forall x\in[a,b]: \quad x(x-1)\le\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \int_0^1 x(x-1)dx \le \int_0^1 \frac{1}{4}dx$

$\Leftrightarrow \int_0^1 x(x-1)dx \le \frac{1}{4}\Big|_0^1$

$\Leftrightarrow \int_0^1 x(x-1) \le \frac{1}{4}$

ដូចនេះ $\int_0^1 x(x-1)dx \le \frac{1}{4}$ ។

ឧទាហរណ៍:២. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $1\le\int_0^1 e^{x^2}dx \le e$ ។

គេបាន $\forall x\in[0,1]: \quad 0\le x\le 1$

$\Leftrightarrow 0\le x^2\le 1 \Rightarrow e^0\le e^{x^2}\le e^1$

$\int_0^1 e^0 dx \le \int_0^1 e^{x^2}dx \le \int_0^1 edx$

$x\Big|_0^1 \le \int_0^1 e^{x^2}dx \le ex\Big|_0^1$

$1\le\int_0^1 e^{x^2}dx\le e$

ដូចនេះ $1\le\int_0^1 e^{x^2}dx\le e$ ។

២. គេឲ្យ $I_n=\int_a^b f(n,x)dx,\quad for\ n\in IN$ ដើម្បីគណនា I_n តាម I_{n-1} or I_{n-2} យើងត្រូវប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ។

ត្រូវតាង u and dv ដែល $\int_a^b vdu=\int_a^b f(n-1\ ,\ x)dx$ or $\int_a^b vdu=\int_a^b f(n-2\ ,\ x)dx$

ឧទាហរណ៍១. គេឲ្យ $I_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin xdx \quad n\in IN$

ក. គណនា I_n ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក។

ខ. បង្ហាញថាស្វីត (I_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រដែលត្រូវកំណត់តួទី១ និងរេសុង ។

គ. បង្ហាញថាស្វីតនេះជាស្វីតរួម រួចបញ្ជាក់លីមីតរបស់វា ។

ឃ. គេឲ្យ $S_n=I_0+I_1+I_2+..........+I_{n-1}+I_n$ គណនា S_n រួចគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

ចម្លើយ

ក. គណនា I_n

យក $u=e^{-x}\Rightarrow du=-e^{-x}dx\ ,\ dv=\sin xdx\Rightarrow v=-\cos x$

គេបាន $I_n=\left[-e^{-x}\cos x\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi}-\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\cos xdx$

$$=\left[-e^{-(n+1)\pi}\cos(n+1)\pi+e^{-n\pi}\cos n\pi\right]-\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\cos xdx$$

តាង $u_1=e^{-x}\Rightarrow du_1=-e^{-x}dx\quad ,\quad dv_1=\cos xdx\Rightarrow v_1=\sin x$

$$I_n=\left[-e^{-(n+1)\pi}\cos(n+1)\pi+e^{-n\pi}\cos n\pi\right]-\left[e^{-x}\sin x\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi}-\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin xdx$$

$$=-e^{-(n+1)\pi}\cos(n+1)\pi+e^{-n\pi}\cos n\pi-e^{-(n+1)\pi}\sin(n+1)\pi+e^{-n\pi}\sin n\pi-I_n$$

$$2I_n=-e^{-(n+1)\pi}\cos(n+1)\pi+e^{-n\pi}\cos n\pi-e^{-(n+1)\pi}\sin(n+1)\pi+e^{-n\pi}\sin n\pi$$

$$=-(-1)^{n+1}e^{-(n+1)\pi}+(-1)^n e^{-n\pi}$$

$$I_n=\frac{(-1)^n e^{-(n+1)\pi}+(-1)^n e^{-n\pi}}{2}$$

ដូចនេះ $I_n=\dfrac{(-1)^n e^{-n\pi}}{2}\left(1+e^{-\pi}\right)$ ។

ខ. បង្ហាញថាស្វីត (I_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រដែលត្រូវកំណត់តួទី១ និងរេសុង

យើងមាន $I_n=\dfrac{(-1)^n}{2}e^{-n\pi}\left(1-e^{-\pi}\right)$

$$I_{n+1}=\frac{(-1)^{n+1}}{2}e^{-(n+1)\pi}\left(1-e^{-\pi}\right)=-\frac{(-1)^n}{2}e^{-n\pi}e^{-\pi}\left(1+e^{-\pi}\right)$$

$$=-e^{-\pi}\left[\frac{(-1)^n}{2}e^{-n\pi}\left(1+e^{-\pi}\right)\right]$$

$$=-e^{-\pi}I_n$$

នេះបញ្ជាក់ថា I_n ជាស្វីតធរណីមាត្រ ។

គេបាន $q=-e^{-\pi}=-\frac{1}{e^{\pi}}$

$I_n=\frac{(-1)^n}{2}e^{-n\pi}\left(1+e^{-\pi}\right)\Rightarrow I_0=\frac{1}{2}\left(1+e^{-\pi}\right)$ ។

ដូចនេះ I_n ជាស្វីតធរណីមាត្រ ដែលមាន $q=-e^{-\pi}$ *and* , $I_0=\frac{1}{2}\left(1+e^{-\pi}\right)$ ។

គ. បង្ហាញថាស្វីតនេះជាស្វីតរួម

តាមសំណួរខាងលើ I_n ជាស្វីតធរណីមាត្រដែលមានរេសុង $q=-\frac{1}{e^{\pi}}$

ដោយ $\frac{1}{e^{\pi}}\in\left]-1\ ,\ 1\right[$ ដូចនេះ I_n ជាស្វីតរួមទៅរក 0 ។

ឃ. គណនា S_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេបាន $S_n=I_0+I_1+I_2+..........+I_{n-1}+I_n$.

$$=I_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=\frac{1-e^{-\pi}}{2}\frac{1-\left(-\frac{1}{e^{\pi}}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{e^{\pi}}}$$

$$=\frac{1}{e^{-\pi}}\frac{1-\left(-\frac{1}{e^{\pi}}\right)^{n+1}}{1+e^{-\pi}}\qquad ;\quad \frac{1}{a^n}=a^{-n}$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\left(-\frac{1}{e^{\pi}}\right)^{n+1}\right]$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{1}{2}\left[1-\left(-\frac{1}{e^{\pi}}\right)^{n+1}\right]$ ។

គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

កាលណា $n\to+\infty\Rightarrow\left(-\frac{1}{e^{-\pi}}\right)^{n+1}\to 0$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=0$ ។

៣. ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ ក្នុងនោះរួមមាន

+ $f(t)$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើអង្កត់ $[\varphi(a)\ ,\ \varphi(b)]$

+ $\varphi'(x)$ ជាប់លើចន្លោះ $[a\ ,\ b]$

+ $x\in[a\ ,\ b]\Rightarrow\varphi(x)\in[\varphi(a)\ ,\ \varphi(b)]$

តាមវិធីសាស្ត្រប្តូរអថេរយើងអនុវត្តន៍

+ តាង $u=\varphi(x)$

+ គណនា $du=\varphi'(x)dx$

+ បម្លែងអ័ក្ស

x	a	b
u	$\varphi(a)$	$\varphi(b)$

+ ជំនួសចូល $I=\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$ ។

ឧទាហរណ៍១. ដោះស្រាយសមីការ $\int_{\sqrt2}^{x}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\frac{\pi}{12}$ ។

យើងត្រូវគណនា $\int_{\sqrt2}^{x}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

តាង $t=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{t}\ \Rightarrow dx=-\frac{dt}{t^2}$

x	$\sqrt2$	x
t	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{1}{x}$

គេបាន $\int_{\sqrt2}^{x}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=-\int_{\frac{\sqrt2}{2}}^{\frac{1}{x}}\frac{1}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}\cdot\frac{dt}{t^2}$

$$=-\int_{\frac{\sqrt2}{2}}^{\frac{1}{x}}\frac{dt}{t^2\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t}\sqrt{1-t^2}}=-\int_{\frac{\sqrt2}{2}}^{\frac{1}{x}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$=-\arcsin t\Big|_{\frac{\sqrt2}{2}}^{\frac{1}{x}}$$

$$=-\arcsin\frac{1}{x}+\arcsin\frac{\sqrt2}{2}$$

$$=-\arcsin\frac{1}{x}+\frac{\pi}{4}$$

គេបានសមីការខាងលើទៅជា $-\arcsin\frac{1}{x}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$

$$-\arcsin\frac{1}{x}=\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4}$$
$$\frac{1}{x}=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=2$$

ដូចនេះ $x=2$ ជាឫសនៃសមីការ ។

ឧទាហរណ៍២. ដោះស្រាយសមីការ $\int_{\ln 2}^{x}\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\frac{\pi}{6}$ ។ យើងគណនា $\int_{\ln 2}^{x}\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$

តាង $t=\sqrt{e^x-1}\Leftrightarrow t^2=e^x-1\Leftrightarrow t^2+1=e^x$

នាំឲ្យ $x=\ln(t^2+1)$ *and* $dx=\frac{2tdt}{t^2+1}$

បើ $x=\ln 2\Rightarrow t=\sqrt{e^{\ln 2}-1}=\sqrt{2-1}=1$

$x=x\Rightarrow t=\sqrt{e^x-1}$

គេបាន $\int_{\ln 2}^{x}\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\int_{1}^{\sqrt{e^x-1}}\frac{1}{t}\cdot\frac{2tdt}{t^2+1}$

$$=2\int_{1}^{\sqrt{e^x-1}}\frac{dt}{t^2+1}=2\arctan t\Big|_{1}^{\sqrt{e^x-1}}$$
$$=2\arctan\sqrt{e^x-1}-2\arctan 1$$
$$=2\arctan\sqrt{e^x-1}-2\cdot\frac{\pi}{4}$$
$$=2\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{\pi}{2}$$

សមីការខាងលើទៅជា

$$2\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}$$
$$2\arctan\sqrt{e^x-1}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$$
$$2\arctan\sqrt{e^x-1}=\frac{\pi}{3}$$
$$\sqrt{e^x-1}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$
$$e^x-1=3$$
$$e^x=u\Rightarrow x=\ln 4$$

ដូចនេះ $x=\ln 4$ ជាឫសនៃសមីការ ។

៤. លក្ខណៈគ្រឹះអាំងតេក្រាលកំណត់

ក. $\int_a^a f(x)dx = 0$ ខ. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

គ. $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \quad b \in [a\ ,\ c]$

ឃ. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ ង. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x) \pm \int_a^b g(x)dx$

ច. $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

៥. បើ f *continuous on interval* $[a\,,b] \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$ ។

Example: Prove that $\left|\int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x}\sin x}{1+x^2}dx\right| \le \frac{\pi}{12e}$ ។

យើងមាន $\forall x \in [1, \sqrt{3}]$: $\left|\frac{1}{e^x}\right| \le \frac{1}{e}$ *or* $\left|e^{-x}\right| \le \frac{1}{e}$

$$|\sin x| \le 1 \Rightarrow \left|\frac{\sin x}{1+x^2}\right| \le \frac{1}{1+x^2}$$

$$\left|\frac{e^{-x}\sin x}{1+x^2}\right| \le \frac{1}{e(1+x^2)} \Rightarrow \int_1^{\sqrt{3}}\left|\frac{e^{-x}\sin x}{1+x^2}\right|dx \le \frac{1}{e}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int_1^{\sqrt{3}}\left|\frac{e^{-x}\sin x}{1+x^2}\right|dx \le \frac{1}{e}\cdot \arctan\Big|_1^{\sqrt{3}}$$

$$\int_1^{\sqrt{3}}\left|\frac{e^{-x}\sin x}{1+x^2}\right|dx \le \frac{1}{e}\left(\arctan\sqrt{3} - \arctan 1\right)$$

$$\int_1^{\sqrt{3}}\left|\frac{e^{-x}\sin x}{1+x^2}\right|dx \le \frac{1}{e}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12e}$$

ដោយ $\left|\int_1^{\sqrt{3}}\frac{e^{-x}\sin x}{1+x^2}dx\right| \le \int_1^{\sqrt{3}}\left|\frac{e^{-x}\sin x}{1+x^2}\right|dx \le \frac{\pi}{12e}$

ដូចនេះ $\left|\int_1^{\sqrt{3}}\frac{e^{-x}\sin x}{1+x^2}dx\right| \le \frac{\pi}{12e}$ ។

៦. ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម (Mean Value Theorem)

if f *continuous on* $[a\,,b]$ *consist* β *that satified*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\beta)(b-a) \quad or \quad f(\beta) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$f(\beta)$ *is Mean Value of Function* f *on interval* $[a\,,b]$.

Example: គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍មួយជាប់លើចន្លោះ $[0\ ,\ 1]$ ។ ស្រាយថា

$$\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx \quad ។$$

តាង $u = \pi - x \Leftrightarrow x = \pi - u \Rightarrow dx = -du$

x	0	π
u	π	0

គេបាន $\int_0^\pi f(\sin x)dx = -\int_\pi^0 (\pi - u)f(\sin u)du$

$$= \int_0^\pi (\pi - u)f(\sin u)du$$

$$= \pi\int_0^\pi f(\sin u)du - \int_0^\pi uf(\sin u)du$$

$$= \pi\int_0^\pi f(\sin x)dx - \int_0^\pi xf(\sin x)dx$$

$$\int_0^\pi xf(\sin x)dx + \int_0^\pi xf(\sin x)dx = \pi\int_0^\pi f(\sin x)dx$$

$$2\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \pi\int_0^\pi f(\sin x)dx$$

ដូចនេះ $\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$ ។

លំហាត់

១. ស្រាយបញ្ជាក់ថា

a. $0 < \int_0^1 e^{x^2}dx < e$

b. $\int_0^1 e^{-2x}dx \le \int_0^1 e^{-x}dx$

c. $1 \le \int_0^1 e^x dx \le e$

d. $\int_0^1 x(x-1)dx \le \frac{1}{4}$

២. កម្មវត្ថុសិក្សាក្នុងលំហាត់នេះគឺស្វីត I_n ដែលកំណត់ដោយគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដោយទំនាក់ទំនង $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx\ ,\ I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx\ ,\ I_2 = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx\ ,\ ....,I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}dx$ ។

ក. គណនា $I_0 + I_1$ and $I_1\ ,\ I_0$ ។

ខ. គណនា $I_n + I_{n+1}$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។ ទាញរកតម្លៃ I_2 and I_3 ។

គ. ប្រៀបធៀប e^{nx} *and* $e^{(n+1)x}$ *if* $x\in[0\ ,\ 1]$ ។ បង្ហាញថា I_n ជាស្វ៊ីតកើន ។

ឃ. បង្ហាញថា $\forall x\in[0\ ,\ 1]$ គេបាន $\frac{1}{4}\le\frac{1}{1+e^x}\le\frac{1}{2}$ ។ ទាញរកតម្លៃអមនៃ I_n ។

តាមនេះគេនឹងគណនា $\int_0^1 e^{nx}dx$ ។ តើ I_n មានលីមីត ឬទេ?

៣. គេឲ្យ $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$, $n=0,1,2,........$។

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $nI_n=(n-1)I_{n-2}$ *for* $n\ge 2$ ។

ខ. គណនា I_{2n} , I_{2n+1}

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថាផលគុណ $nI_n\cdot I_{n-1}$ មិនអាស្រ័យនឹង n ។

មេរៀនទី២ ការអនុវត្តអាំងតេក្រាល

១. អនុវត្តនៅក្នុងសេដ្ឋកិច្ច

ឧទាហរណ៍១. ក្រុមហ៊ុនទូរសព្ទចល័តមួយបានទទួលប្រាក់ចំណូលបន្ថែមក្នុងមួយសប្តាហ៍ពីការហៅទូរសព្ទចេញក្នុង $x(s)$ ជាអនុគមន៍ $f(x)=376-0.24x$ (គិតជាពាន់រៀល) ។ រកអនុគមន៍ប្រាក់ចំណូលសរុបក្នុង១សប្តាហ៍ដោយដឹងថាប្រាក់ចំណូលប្រចាំក្នុង១សប្តាហ៍ $R(0)=15\,000$ (គិតជាពាន់រៀល)។

ដំណោះស្រាយ

រកអនុគមន៍ប្រាក់ចំណូលសរុបក្នុង១សប្តាហ៍

គេបាន $f(x)=R'(x)$

នោះ $R(x)=\int f(x)dx$

$$=\int (376-0.24x)dx$$

$$=376x-0.12x^2+C$$

ដោយប្រាក់ចំណូក្នុង១សប្តាហ៍ $R(0)=15\,000$ (គិតជាពាន់រៀល)

នាំឲ្យ $R(0)=376\cdot 0-0.12\cdot 0^2+C=15\,000$

នោះ $C=15\,000$

ដូចនេះ $R(x)=376x-0.12x^2+15\,000$ (គិតជាពាន់រៀល) ។

ឧទាហរណ៍២. ក្រុមហ៊ុនផលិតសម្ភារអគ្គិសនីមួយបានចំណាយប្រាក់ក្នុងមួយសប្តាហ៍ 7 200 (គិតជាពាន់រៀល) ។ ដើម្បីឆ្លើយតបនឹងតម្រូវការក្នុងទីផ្សារ ក្រុមហ៊ុនបានបង្កើនផលិយផលរបស់ខ្លួន ដោយដឹងថាប្រាក់ចំណាយបន្ថែមជាអនុគមន៍ $C'(x)=84+1.5x$ (គិតជាពាន់រៀល) ដែល x ជាចំនួនផលិតផល ។រកអនុគមន៍នៃប្រាក់ចំណាយសរុបពេលក្រុមហ៊ុនបង្កើនផលិតផល ។

ដំណោះស្រាយ

រកអនុគមន៍ប្រាក់ចំណាយសរុប

បើ $C(x)$ ជាអនុគមន៍ប្រាក់ចំណាយសរុបគេបាន

$C(x)=\int C'(x)dx=\int (84+1.5x)dx$

$=84x+\frac{3}{4}x^2+K \quad , \quad K\in IR$

$=\frac{3}{4}x^2+84x+K$

ដោយមួយសប្តាហ៍ក្រុមហ៊ុនចំណាយអស់ 7 200 នោះ K=7 200

ដូចនេះ អនុគមន៍ប្រាក់ចំណាយសរុបគឺ $C(x)=\frac{3}{4}x^2+84x+7\,200$ (គិតជាពាន់រៀល)។

ឧទាហរណ៍៣. ក្រុមហ៊ុនលក់ទឹកអប់មួយបានទទួលប្រាក់ចំណេញបន្ថែមពីការលក់ទឹកអប់ចំនួន x ដបជាអនុគមន៍ $P'(x)=72-1.2x$ (គិតជាពាន់រៀល) ។

ក. រកអនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញដោយដឹងថាប្រាក់ចំណេញពីការលក់ទឹកអប់ 80 ដប ស្មើនឹង 720 (គិតជាពាន់រៀល) ។

ខ. រកប្រាក់ចំណេញពីការលក់ទឹកអប់ 90ដប ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកអនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញ

បើ $P(x)$ ជាអនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញគេបាន

$P(x)=\int P'(x)dx$

$=\int (72-1.2x)dx$

$=72x-0.6x^2+c \quad , \quad c\in IR$

ដោយប្រាក់ចំណេញពីការលក់ទឹកអប់ 80ដបគឺ 720 គេបាន

$$P(80)=72\cdot 80-0.6\cdot(80)^2+c$$
$$720=5760-3840+c$$
$$c=720-5760+3840$$
$$c=-1200$$

ដូចនេះ អនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញគឺ $P(x)=72x-0.6x^2-1200$ (គិតជាពាន់រៀល)។

ខ. រកប្រាក់ចំណេញពីការលក់ទឹកអប់ 90 ដប

គេបាន $P(90)=72\cdot 90-0.6\cdot(90)^2-1200$

$=6480-4860-1200=420$ (គិតជាពាន់រៀល) ។

២. អនុវត្តក្នុងរូបវិទ្យា

ឧទាហរណ៍១. វត្ថុមួយផ្លាស់ទីតាមទិសឈរ ។ រយៈពេល t វិនាទីក្រោយមកវត្ថុនោះផ្លាស់ទី ដោយល្បឿន $V(t)=96-32t\ \ (m/s)$ ។

ក. រកកម្ពស់ $S(t)$ ដោយដឹងថាវត្ថុនោះផ្លាស់ទីពីកម្ពស់ $S(0)=18\,m$ ។

ខ. រកកម្ពស់ $S(t)$ រយៈពេល 3 វិនាទី ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកកម្ពស់ $S(t)$

បើគេដឹងថា $S'(t)=V(t)=96-32t$

គេបាន

$$S(t)=\int S'(t)dt$$
$$=\int (96-32t)dt$$
$$=96t-16t^2+k \quad , \quad k\in IR$$

ដោយ $S(0)=18\,m$

$$S(0)=96\cdot-16\cdot 0^2+k$$
$$k=18$$

ដូចនេះអនុគមន៍កម្ពស់គឺ $S(t)=96t-16t^2+18\ \ (m)$ ។

ខ. រកកម្ពស់ $S(t)$ នៅរយៈពេល $t=3\,s$

កាលណា $t=3\,s$

គេបាន

$$S(3)=96\cdot 3-16\cdot(3)^2+18$$
$$S(3)=288-144+18$$
$$S(3)=162\ m$$

ដូចនេះ កម្ពស់ $S(t)$ នៅរយៈពេល $t=3\,s$ គឺ $162\ m$ ។

ឧទាហរណ៍២. កីឡាបាល់ទាត់ម្នាក់បានទាត់បាល់តាមទិសឈរពីដំបូលអាគារមួយមានកម្ពស់ 25m ដោយល្បឿន $V(0)=20\ m/s$ ។

ក. រកអនុគមន៍កម្ពស់ $S(t)$ ដោយដឹងថាកម្លាំងទំនាញផែនដីស្មើនឹង $-10\,m\cdot s^{-2}$ ។

ខ. រករយៈពេល t ដែលបាល់ធ្លាក់ដល់ដី ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកអនុគមន៍កម្ពស់ $S(t)$

របៀបទី១

យើងមានកម្ពស់ដើម $S(0)=25\,m$ ល្បឿនដើម $V(0)=20\,m/s$

កម្លាំងទំនាញផែនដី $g(t)=10\,m\cdot s^{-2}$

គេបាន

$$V(t)=\int g(t)dt$$
$$=\int -10dt=-10t+c_1$$

ដោយ $V(0)=20 \Leftrightarrow -10\cdot 0+c_1=20 \Rightarrow c_1=20$

នាំឲ្យ $V(t)=-10t+20$

ម្យ៉ាងទៀត

$$S(t)=\int V(t)dt$$
$$=\int (-10t+20)dt$$
$$=-5t^2+20t+c_2$$

ដោយ

$$S(0)=25 \Leftrightarrow -5\cdot 0^2+20\cdot 0+c_2=25 \Rightarrow c_2=25$$
$$\Rightarrow S(t)=-5t^2+20t+25$$

ដូចនេះ $S(t)=-5t^2+20t+25 \quad (m)$ ។

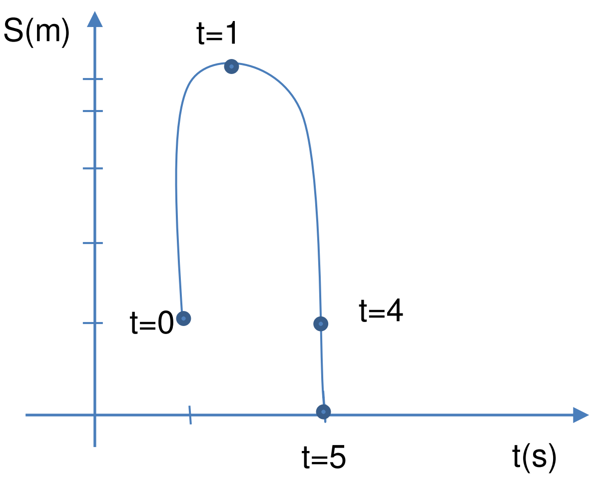
របៀបទី២

តាមរូបមន្តក្នុងរូបវិទ្យា $S(t)=\frac{1}{2}gt^2+V_0(t)+S(0)$

គេបាន

$$S(t)=\frac{1}{2}gt^2+V_0t+S(0)$$
$$=\frac{1}{2}(-10)t^2+20t+25=-5t^2+20t+25 \quad (m)$$

ខ. រករយៈពេល t ដែលបាល់ធ្លាក់ដល់ដី



គេមានអនុគមន៍កម្ពស់ $S(t) = -5t^2 + 20t + 25$

ពេលបាល់ធ្លាក់ដល់ដីនោះកម្ពស់ $S(t) = 0$

គេបាន $-5t^2 + 20t + 25 = 0$

$$t^2 - 4t - 5 = 0$$

នាំឲ្យ $t = -1$ មិនយក $t = 5\,s$

ដូចនេះ បាល់ធ្លាក់ដល់ដីក្នុងរយៈពេល $t = 5\,s$ ។

ឧទាហរណ៍៣. គេបាញ់គ្រាប់គ្រាប់កាំភ្លើងតាមទិសដេក។ គ្រាប់កាំភ្លើងផ្លាស់ទីដោយល្បឿន $V(t) = 36 + \frac{60}{(t+1)^2}$ (m/s) ។ រកអនុគមន៍ចម្ងាយចរ $S(t)$ ដោយដឹងថា $S(1) = 10\,m$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកអនុគមន៍ចម្ងាយចរ $S(t)$

គេមាន $S'(t) = V(t) = 36 + \frac{60}{(t+1)^2}$

គេបាន

$$S(t) = \int S'(t)dt$$

$$= \int \left(36 + \frac{60}{(t+1)^2}\right)dt$$

$$= 36t + 60\int \frac{dt}{(t+1)^2}$$

តាង $x = t + 1 \Rightarrow dx = dt$

$$\int \frac{dt}{(t+1)^2} = \int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}dx$$

$$= \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} = -\frac{1}{x} = -\frac{1}{(t+1)}$$

$$S(t) = 36t - 60\frac{1}{(t+1)} + k$$

ដោយ $S(1) = 10 \Leftrightarrow 36 - 60\cdot\frac{1}{2} + k = 10 \Rightarrow k = 4$

ដូចនេះ អនុគមន៍ចម្ងាយចរគឺ $S(t) = 36t - 60\cdot\frac{1}{(t+1)} + 4$ (m) ។

៣. អនុវត្តក្នុងវេជ្ជសាស្ត្រ

ឧទាហរណ៍១. គេប៉ាន់ស្មានថាក្នុងរយៈពេល t ឆ្នាំគិតពីពេលនេះទៅប្រជាជនក្នុងទីក្រុងមួយ នឹងមានអត្រាប្រែប្រួល $500+1000\sqrt{t}$ នាក់/ឆ្នាំ ។ ចំនួនប្រជាជនបច្ចុប្បន្នមាន 45 000នាក់។ តើក្នុងរយៈពេល9 ឆ្នាំប្រជាជនមានចំនួនប៉ុន្មាន?

ដំណោះស្រាយ

តាង $P(t)$ ជាចំនួនប្រជាជនក្នុងរយៈពេល t ឆ្នាំ ។ នោះអត្រាប្រែប្រួលនៃប្រជាជនគឺជាដេរីវេ

$$\frac{dP}{dt}=500+1000\sqrt{t}$$

$$\Rightarrow P(t)=\int\left(500+1000\sqrt{t}\right)dt$$

$$=500t+1000t^{\frac{3}{2}}+c$$

ពេលបច្ចុប្បន្ន t=0 ប្រជាជនមានចំនួន 45 000 នាក់

$$\Rightarrow P(0)=c=45\,000$$

$$so\ that\ \ P(t)=500t+1000t^{\frac{3}{2}}+45\,000$$

ចំនួនប្រជាជនក្នុងរយៈពេល 9ឆ្នាំគឺ

$$P(9)=500+1000\cdot 9^{\frac{3}{2}}+45\,000=76\,500 \text{ នាក់ ។}$$

ឧទាហរណ៍២. ចំនួនបាក់តេរីបានកើនឡើងពី ៣០០០ ទៅ ៩០០០ ក្នុងរយៈពេល ៨ម៉ោង ។ បើអត្រាកើនឡើងនៃបាក់តេរីក្នុងរយៈពេល t សមមាត្រនឹងចំនួនបាក់តេរីក្នុងខណៈពេល នោះ។ ចូរប៉ាន់ស្មានពីចំនួនបាក់តេរីក្នុងរយៈពេល ២៤ម៉ោង ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $P(t)$ ជាចំនួនបាក់តេរីក្នុងរយៈពេល t ម៉ោង

$$\Rightarrow P(0)=3000 \quad , \ P(8)=9000$$

អត្រាកើនឡើងនៃបាក់តេរីក្នុងរយៈពេល t សមមាត្រនឹងចំនួនបាក់តេរីក្នុងខណៈពេលនោះ

$$\Rightarrow k\frac{dP}{dt}=p \quad (k \text{ ជាមេគុណសមមាត្រ})$$

$$\Leftrightarrow \frac{dt}{k}=\frac{dP}{P}$$

បំពាក់អាំងតេក្រាលអង្គទាំងសងខាងគេបាន

$$\int \frac{dt}{k} = \int \frac{dP}{P}$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{k} = \ln P + c$$

បំពាក់អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលអង្គទាំងសងខាងគេបាន

$$e^{\frac{t}{k}} = e^{(\ln P + c)} = e^c \times e^{\ln P} = e^c P$$

$$\Leftrightarrow P(t) = Ae^{\frac{t}{k}} \quad , \quad A = e^{-c}$$

ជំនួស t=0 និង t=8 ក្នុងសមីការខាងលើគេបាន

$$P(0) = A = 3000$$

$$P(8) = 3000 \cdot e^{\frac{8}{k}} = 9000$$

$$\Rightarrow k = \frac{8}{\ln 3} = 7.282$$

ឥឡូវយើងអាចប៉ាន់ស្មានពីចំនួនបាក់តេរីក្នុងរយៈពេល ២៤ម៉ោង

$$P(24) = 3000 \cdot e^{\frac{24}{7.282}} = 80996.8 \approx 81\,000$$ បាក់តេរី

ឧទាហរណ៍៣. អត្រានៃការសាយភាយជម្ងឺរាតត្បាតក្នុងសហគមន៍មួយដែលមានប្រជាជន $P = 500$ នាក់ សមមាត្រទៅនឹងផលគុណរវាងចំនួនអ្នកឆ្លងមេរោគ និងចំនួនអ្នកមិនទាន់ ឆ្លងមេរោគ។ ដំបូងមានអ្នកឆ្លងមេរោគចំនួន ២នាក់ មួយខែក្រោយមកមានអ្នកឆ្លងមេរោគសរុបចំនួន ១០៣នាក់ ។ បើគ្មានវិធានការទប់ស្កាត់តើអាចមានអ្នកឆ្លងមេរោគចំនួនប៉ុន្មាននាក់ក្នុងរយៈពេលៈ

ក. ៣ខែទៀត

ខ. ១ឆ្នាំទៀត ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $Q(t)$ ជាចំនួនអ្នកឆ្លងមេរោគក្នុងរយៈពេល t ឆ្នាំ

$\Rightarrow P - Q$ ជាចំនួនអ្នកមិនទាន់ឆ្លងមេរោគ

អត្រានៃការសាយភាយជម្ងឺរាតត្បាតក្នុងសហគមន៍សមមាត្រទៅនឹងផលគុណរវាងចំនួនអ្នកឆ្លងមេរោគ និង ចំនួនអ្នកមិនទាន់ឆ្លងមេរោគ

$\frac{dQ}{dt}=k(P-Q)Q \Rightarrow \frac{dQ}{(P-Q)Q}=kdt$ (k ជាមេគុណសមមាត្រ)

បំពាក់អាំងតេក្រាលអង្គទាំងសងខាង គេបាន

$$\int \frac{dQ}{(P-Q)Q}=\int kdt$$

ដោយ $\frac{1}{(P-Q)Q}=\frac{1}{P}\left[\frac{P}{(P-Q)Q}\right]=\frac{1}{P}\left[\frac{1}{Q}+\frac{1}{P-Q}\right]$

នោះសមីការអាំងតេក្រាលខាងលើទៅជា

$$\frac{1}{P}\int \frac{1}{Q}dQ+\frac{1}{P}\int \frac{1}{P-Q}dQ=\int kdx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{P}\ln|Q|-\frac{1}{P}\ln|P-Q|=kt+c$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{P}\ln\left|\frac{Q}{P-Q}\right|=kt+c$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{P}\ln\left(\frac{Q}{P-Q}\right)=kt+c \qquad (Q>0\ ,\ P>0\ )$$

$$\ln\left(\frac{Q}{P-Q}\right)=PKt+Pc$$

$$\frac{Q}{P-Q}=e^{Pkt}\times e^{Pc}=Ae^{Pkt} \quad , \quad A=e^{Pc}$$

$$Q(t)=\frac{APe^{Pkt}}{1+Ae^{Pkt}}=\frac{P}{1+e^{-P(kt+c)}}=\frac{500}{1+e^{-500(kt+c)}}$$

ដំបូង t=0 មានអ្នកឆ្លងមេរោគ ២នាក់

$$Q(0)=2=\frac{500}{1+e^{-500c}}$$

$$e^{-500c}=249$$

$$\Rightarrow Q(t)=\frac{500}{1+249e^{-500kt}}$$

ក្នុងរយៈពេល ១ខែ ($t=\frac{1}{12}$ឆ្នាំ) ទៀតមានអ្នកជម្ងឺឆ្លងមេរោគចំនួន ១០៣ នាក់

$$Q\left(\frac{1}{12}\right)=\frac{500}{1+249e^{\frac{-500k}{12}}}=103 \Rightarrow e^{\frac{-500k}{12}}=0.015479393$$

$$\Rightarrow k=\frac{12\times\ln(0.015479393)}{-500}\approx 0.1$$

$$\Rightarrow Q(t)=\frac{500}{1+249e^{-50t}}$$

ក. ក្នុងរយៈពេល ៣ខែ ($t=\frac{1}{4}$ ឆ្នាំ) ទៀតអាចមានអ្នកឆ្លងមេរោគចំនួន

$$Q\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{500}{1+249e^{-50\cdot\frac{1}{4}}}=500$$ នាក់

ខ. ក្នុងរយៈពេល១ឆ្នាំ (t=1ឆ្នាំ) ទៀតអាចមានអ្នកឆ្លងមេរោគ

$$Q(1)=\frac{500}{1+249e^{-50}}=500$$ នាក់ ។

The Hyperbolic Functions

Introduction

The hyperbolic functions $\cosh x$, $\sinh x$, $\tanh x$ etc are certain combinations of the exponential functions e^x and e^{-x}. The notation implies a close relationship between these functions and the trigonometric functions $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$ etc. The close relationship is algebraic rather than geometrical. For example, the functions $\cosh x$ and $\sinh x$ satisfy the relation

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

which is very similar to the trigonometric identity $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. (In fact any trigonometric identity has an equivalent hyperbolic function identity).

The hyperbolic functions are not introduced because they are a mathematical nicety. These combinations of exponentials do arise naturally and sufficiently often to warrant sustained study. For example, the shape of a chain hanging under gravity is well described by $\cosh x$ and the deformation of uniform beams can be expressed in terms of hyperbolic tangents.

Prerequisites

Before starting this Block you should ...

① have a good knowledge of the exponential function

② have knowledge of odd and even functions

③ have familiarity with the definitions of $\tan x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ and of trigonometric identities

Learning Outcomes

After completing this Block you should be able to ...

✓ understand how hyperbolic functions are defined in terms of exponential functions

✓ be able to obtain hyperbolic function identities and manipulate expressions involving hyperbolic functions

Learning Style

To achieve what is expected of you ...

☞ allocate sufficient study time

☞ briefly revise the prerequisite material

☞ attempt *every* guided exercise and most of the other exercises

1. Constructing even and odd functions

A given function $f(x)$ can always be split into two parts, one of which is even and one of which is odd. To do this write $f(x)$ as $\frac{1}{2}[f(x)+f(x)]$ and then simply add and subtract $\frac{1}{2}f(-x)$ to this to give

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x)+f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

The term $\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ is even because when x is replaced by $-x$ we have $\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]$ which is the same as the original. However, the term $\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$ is odd since, on replacing x by $-x$ we have $\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)] = -\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$ which is the negative of the original.

Try each part of this exercise

Separate the function $x^2 - 3^x$ into odd and even parts.

Part (a) First, define $f(x)$ and find $f(-x)$.

Part (b) Now construct $\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$, $\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$

The odd and even parts of the exponential function

Using the approach outlined above we see that the even part of e^x is

$$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

and the odd part of e^x is

$$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

We give these new functions special names: $\cosh x$ (pronounced 'cosh' x) and $\sinh x$ (pronounced 'shine' x)

Key Point

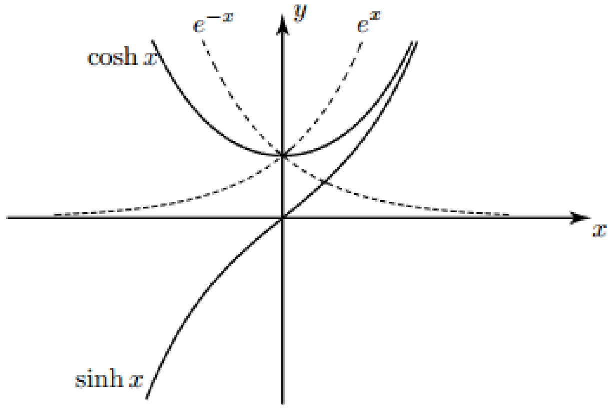
$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \qquad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$\cosh x$ and $\sinh x$ are called hyperbolic functions

These two relations, when added and subtracted, give

$$e^x = \cosh x + \sinh x \qquad \text{and} \qquad e^{-x} = \cosh x - \sinh x$$

The hyperbolic functions are closely related to the trigonometric functions $\cos x$ and $\sin x$. Indeed, this explains the notation that we use. The hyperbolic cosine is written 'cos' with a 'h' to get cosh and the hyperbolic sine is written 'sin' with a 'h' to get sinh. The graphs of $\cosh x$ and $\sinh x$ are shown in the following diagram.



Note that $\cosh x > 0$ for all values of x and that $\sinh x$ only vanishes when $x = 0$.

2. Hyperbolic identities

The hyperbolic functions $\cosh x$, $\sinh x$ satisfy similar (but not identical) identities to those satisfied by $\cos x$, $\sin x$. We note first, some basic notation similar to that employed with trigonometric functions:

$$\cosh^n x \quad \text{means} \quad (\cosh x)^n \qquad\qquad \sinh^n x \quad \text{means} \quad (\sinh x)^n \qquad n \neq -1$$

In the special case that $n = -1$ we **do not** use $\cosh^{-1} x$ and $\sinh^{-1} x$ to mean $\frac{1}{\cosh x}$ and $\frac{1}{\sinh x}$ respectively. (The notation $\cosh^{-1} x$ and $\sinh^{-1} x$ is reserved for the **inverse functions** of $\cosh x$ and $\sinh x$ respectively).

Try each part of this exercise

Show that $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ for all x.

Part (a) First find an expression for $\cosh^2 x$ in terms of the exponential functions e^x, e^{-x}

$$\cosh^2 x = \left[\tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right]^2 =$$

Part (b) Similarly, find an expression for $\sinh^2 x$ in terms of e^x, e^{-x}

$$\sinh^2 x = \left[\tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right]^2 =$$

Part (c) Finally determine $\cosh^2 x - \sinh^2 x$.

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \tfrac{1}{4}[e^{2x} + 2 + e^{-2x}] - \tfrac{1}{4}[e^{2x} - 2 + e^{-2x}] =$$

As an alternative to the calculation in this guided exercise we could, instead, use the relations

$$e^x = \cosh x + \sinh x \qquad\qquad e^{-x} = \cosh x - \sinh x$$

and so, remembering the algebraic identity: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ we see that

$$(\cosh x + \sinh x)(\cosh x - \sinh x) = e^x e^{-x} = 1 \qquad \text{that is} \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Key Point

The fundamental identity relating hyperbolic functions is:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

This is the hyperbolic function equivalent of the trigonometric identity: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Try each part of this exercise

Show that $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$.

Part (a) First, find $\cosh x \cosh y$ in terms of exponentials.

$$\cosh x \cosh y = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) =$$

Part (b) Now find $\sinh x \sinh y$

$$\sinh x \sinh y = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right) =$$

Part (c) Now find $\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$ and express the result in terms of a hyperbolic function.

Other hyperbolic function identities can be found in a similar way. The most commonly used hyperbolic identities are listed in the following keypoint.

Key Point

- $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$
- $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
- $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
- $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh y$
- $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$ or $\cosh 2x = 2\cosh^2 - 1$ or $\cosh 2x = 1 + 2\sinh^2 x$

3. Related hyperbolic functions

Once the trigonometric functions $\cos x$, $\sin x$ are introduced then related functions are also introduced; $\tan x$, $\sec x$, $\text{cosec}\ x$ through the relations:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \text{cosec}\ x = \frac{1}{\sin x}$$

In an exactly similar way we introduce hyperbolic functions $\tanh x$, $\text{sech} x$ and $\text{cosech}\ x$ (again the notation is obvious: take the 'trigonometric' name and append the letter 'h'). These functions are defined in the following keypoint

Key Point

Related hyperbolic functions:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \text{sech} x = \frac{1}{\cosh x} \qquad \text{cosech}\ x = \frac{1}{\sinh x}$$

Try each part of this exercise

Show that

(a) $\sinh(x - y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$

(b) $1 - \tanh^2 x = \text{sech}^2 x$

Part (a)(i) Use the identity $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$ and replace y by $-y$.

$\sinh(x - y) =$

Part (a)(ii) Now obtain expressions for $\cosh(-y)$ and $\sinh(-y)$.

$\cosh(-y) =$ $\qquad\qquad$ $\sinh(-y) =$

Part (a)(iii) Now complete the problem

$\sinh(x - y) = \sinh x \cosh(-y) + \cosh x \sinh(-y) =$

Part (b) Use the identity $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ *so*

More exercises for you to try

1. Express
(a) $2\sinh x + 3\cosh x$ in terms of e^x and e^{-x}.
(b) $2\sinh 4x - 7\cosh 4x$ in terms of e^{4x} and e^{-4x}.

2. Express
(a) $2e^x - e^{-x}$ in terms of $\sinh x$ and $\cosh x$.
(b) $\frac{7e^x}{(e^x - e^{-x})}$ in terms of $\sinh x$ and $\cosh x$, and then in terms of $\coth x$.
(c) $4e^{-3x} - 3e^{3x}$ in terms of $\sinh 3x$ and $\cosh 3x$.

3. Using only the cosh and sinh keys on your calculator find the values of
(a) $\tanh 0.35$, (b) $\text{cosech} 2$, (c) $\text{sech}(0.6)$.

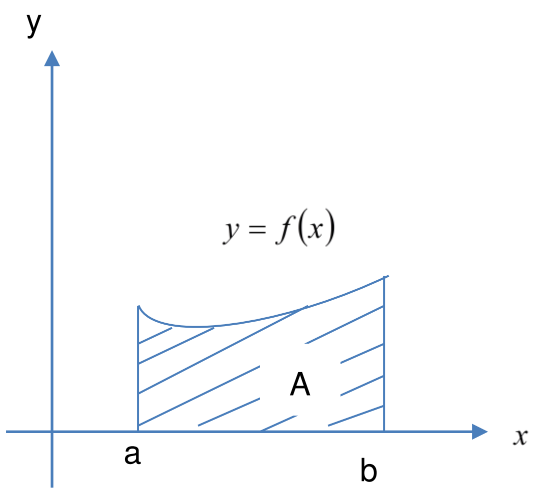
មេរៀនទី៤ អាំងតេក្រាលកំណត់

១. គណនាផ្ទៃក្រឡា

ក. ផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណព្នាយកោង

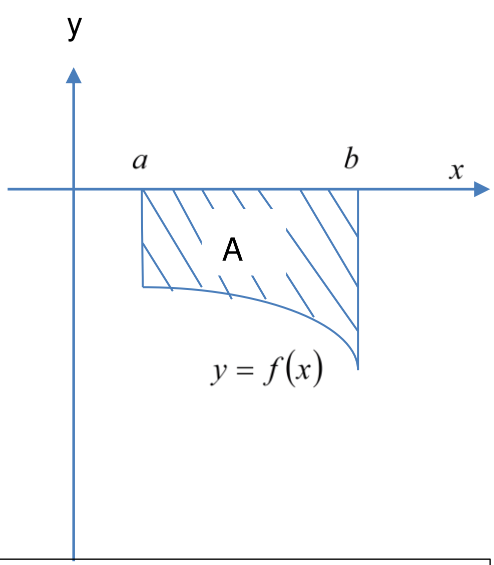
ផ្ទៃក្រឡានៃប្លង់ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$ និង $x=b$ ។

ខ្សែកោងនៅលើអក្សអាប់ស៊ីស



គេបាន $A=\int_a^b f(x)dx$

ខ្សែកោងនៅលើអក្សអរដោនេ



គេបាន $A=\int_a^b[-f(x)]dx$

ជាទូទៅ បើពុំគិតទីតាំងនៃខ្សែកោងតាង $y=f(x)$ ធៀបនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ $(f(x)>0 \ or \ f(x)<0)$ នោះផ្ទៃក្រឡាចតុកោណព្នាយកោងគឺ $A=\int_a^b|f(x)|dx$ ។

ខ. ផ្ទៃក្រឡានៅចន្លោះខ្សែកោងពីរ

ផ្ទៃក្រឡា A នៃប្លង់ខណ្ឌដោយខ្សែកោងតាងអនុគមន៍

$y=f(x)$ and $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$:

+ ករណី $f(x)\ge g(x)$ គេបានផ្ទៃក្រឡាគឺ

$\boxed{A=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx}$ ។

+ ករណី $g(x)\ge f(x)$ គេបានផ្ទៃក្រឡាគឺ

$\boxed{A=\int_a^b[g(x)-f(x)]dx}$ ។

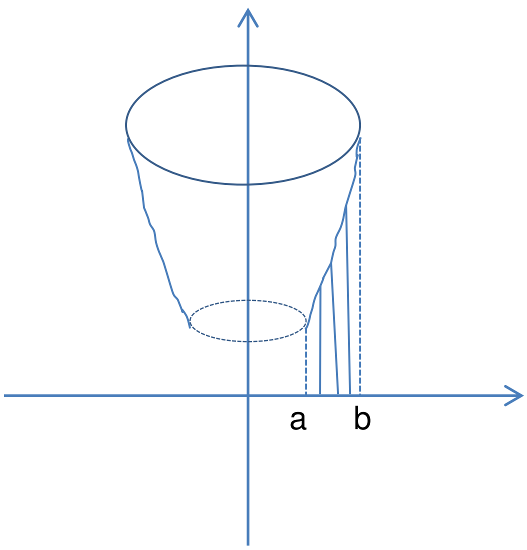
ជាទូទៅ បើពុំគិតទីតាំងនៃខ្សែកោងតាង $y=f(x)$ ធៀបនឹងខ្សែកោងតាង $y=g(x)$ ហើយ $(f(x)\le g(x)\ or\ f(x)\ge g(x))$ ក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ នោះផ្ទៃក្រឡាគឺ

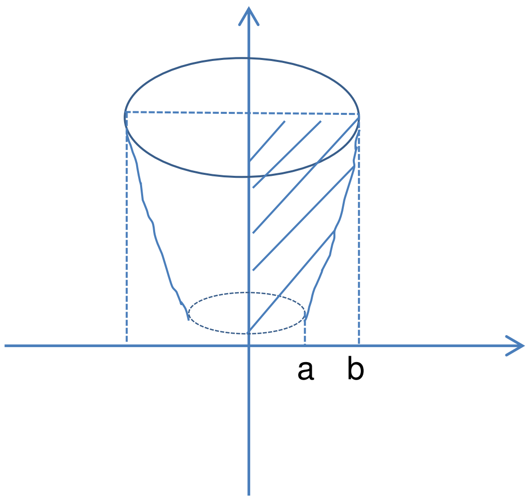
$A=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$ ។

២. គណនាមាឌនៃសូលីតបរិវត្ត

បើអនុគមន៍ $y=f(x)$ មានតម្លៃវិជ្ជមានហើយជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះមាឌនៃសូលីតបរិវត្តបានពីការវិលនៃផ្ទៃដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ និងអ័ក្ស អាប់ស៊ីស $a\le x\le b$ ជុំវិញអ័ក្ស អាប់ស៊ីសកំណត់ដោយ $V=\int_a^b\pi[f(x)]^2dx$ ។

បើអនុគមន៍ $y=f(x)$ មានតម្លៃវិជ្ជមានហើយជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះមាឌនៃសូលីតបរិវត្តបានពីការវិលនៃផ្ទៃដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ និងអ័ក្ស អរដោនេ $a\le x\le b$ ជុំវិញអ័ក្ស អរដោនេ កំណត់ដោយ រូបខាងក្រោម:





$\boxed{V_y=2\pi\int_a^b xydx}$

$\boxed{V_y=\pi\int_{f(a)}^{f(b)}x^2dy}$

មាឌសូលីតបរិវត្តកំណត់បានពីការវិលជុំវិញអ័ក្ស $(x'ox)$ នៃផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $f(x)$ *and* $g(x)$ លើចន្លោះ $[a,b]$ មានពីរករណីគឺ

+ បើ $f(x)\geq g(x)$ គេបាន

$$V=\pi\int_a^b\left([f(x)]^2-[g(x)]^2\right)dx.$$

+ បើ $f(x)\leq g(x)$ គេបាន

$$V=\pi\int_a^b\left([g(x)]^2-[f(x)]^2\right)dx$$ ។

មេរៀនទី៥ ពហុអាំងតេក្រាល

១. អាំងតេក្រាលឌុប (Double Integral)

ក. និយមន័យ

f ជាអនុគមន៍ពីរអថេរជាប់លើដែន D មួយនៃ IR^2 ។ ឧបមាថា $D=[a,b]\times[c,d]$

ឯកសារយោង

1. អាំងតេក្រាល និងអាំងតេក្រាលកំណត់ របស់ សាស្ត្រាចារ្យ ដៃ សំអាត សាកលវិទ្យាល័យឯកទេសនៃកម្ពុជា

2. Real Analysis 3 by Soun Sovann (Royal University Phnom Penh) 2008

3. Real Analysis 2 by Soun Sovann (Royal University Phnom Penh) 2003

4. Mathematics for Medicine by Dr Hak Thyro International University(2011)

5. website: www.youtube.com

6.website: www.goole/hyperbolic.com

7.website: www.google/doubleintegral.com.kh