

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

សម្រាប់ថ្នាក់ទី ១២

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} = \frac{a^2}{2}$$

រៀបរៀងដោយ លីម ធួន និង សែន ពិសិដ្ឋ

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

សម្រាប់ថ្នាក់ទី ១២

កេរ្តិ៍សិទ្ធិ ដោយ លីម ផល្គុន

Tel: 017 768 246

www.mathtoday.wordpress.com

គណៈកម្មការនីត្ត និង រៀបរៀង

លីម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

**លោក យ៉ង់ ធារី
លោក លីម សុន
លោក អ៊ុន សំណាង**

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លីម មិគ្គសិរ

ការិយកម្មវិធី

លោកស្រី លី គុណ្ណាកា លោក អ៊ុន សំណាង

អេម្បកថា

សួស្តីមិត្តអ្នកសិក្សាជាទីស្រឡាញ់រាប់អាន !

សៀវភៅ លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍ ដែលលោកអ្នកកំពុងតែកាន់
អាននេះខ្ញុំបាទបានរៀបចំឡើងសម្រាប់ទុកជាឯកសារសម្រាប់អ្នកសិក្សាដែល
មានបំណងចង់ចេះ លើផ្នែកនៃមេរៀននេះឲ្យបានកាន់តែច្បាស់ ។

នៅក្នុងសៀវភៅនេះរួមមាន មេរៀនសង្ខេប លំហាត់គំរូ និង លំហាត់អនុវត្ត
សម្រាប់អ្នកសិក្សាហ្វឹកហាត់ដោះស្រាយដោយខ្លួនឯង។

យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា សៀវភៅមួយក្បាលនេះ នឹងអាចចូលរួមផ្តល់នូវ
គំនិត និង វិធីសាស្ត្រថ្មីៗក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់ផ្នែក លីមីត និង ភាពជាប់
នៃអនុគមន៍ ចំពោះលោកអ្នកសិក្សាពុំខានឡើយ ។

ជាទីបញ្ចប់ខ្ញុំបាទសូមជូនពរចំពោះលោកអ្នក សូមមានសុខភាពល្អ
មានប្រាជ្ញាឈ្លាសវៃ និង ទទួលបានជោគជ័យក្នុងគ្រប់ភារកិច្ច ។

បាត់ដំបង ថ្ងៃទី១៨ វិច្ឆិកា ឆ្នាំ២០១១

អ្នកនិពន្ធ និង ស្រាវជ្រាវ

លីម ផល្គុន

Tel : 017 768 246

Email: lim_phalkun@ymail.com

Website: www.mathtoday.wordpress.com

ជំពូកទី១

លីមីតនៃអនុគមន៍

១-លីមីតនៃអនុគមន៍គ្រប់ចំនួនកំណត់

និយមន័យ១ ៖ អនុគមន៍ f មានលីមីត L កាលណា x ខិតជិត a

បើគ្រប់ចំនួន $\epsilon > 0$ មានចំនួន $\delta > 0$ ដែល $0 < |x - a| < \delta$ នាំឱ្យ

$|f(x) - L| < \epsilon$ ។ គេកំណត់សរសេរ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ។

ឧទាហរណ៍ ដោយប្រើនិយមន័យបង្ហាញថា $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 4) = 10$?

យើងត្រូវបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួន $\epsilon > 0$ មាន $\delta > 0$ ដែល

$|(3x + 4) - 10| < \epsilon$ កាលណា $0 < |x - 2| < \delta$ ។

គេបាន $|(3x + 4) - 10| < \epsilon \Leftrightarrow |3(x - 2)| < \epsilon$ គ្រប់ $\epsilon > 0$

សមមូល $|x - 2| < \frac{\epsilon}{3}$ យក $\delta = \frac{\epsilon}{3}$ នោះ $|x - 2| < \delta$ ។

សម្រាយនេះបញ្ជាក់ថា $\epsilon > 0$ មាន $\delta = \frac{\epsilon}{3} > 0$ ដែល $|x - 2| < \delta$

នាំឱ្យ $|(3x + 4) - 10| < \epsilon$ ។ ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 4) = 10$ ។

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

និយមន័យ ២៖ អនុគមន៍ f ខិតទៅរក $+\infty$ ឬ $-\infty$ កាលណា x

ខិតជិត a បើគ្រប់ចំនួន $M > 0$ មានចំនួន $\delta > 0$ ដែល

$$0 < |x - a| < \delta \text{ នាំឱ្យ } f(x) > M \text{ ឬ } f(x) < -M \text{ ។}$$

គេកំណត់សរសេរ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ឬ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ។

ឧទាហរណ៍ គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{2x + 3}{x - 2}$

ចូរស្រាយតាមនិយមន័យថា $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ ។

$$\text{គេមាន } f(x) = \frac{2x + 3}{x - 2} = \frac{2(x - 2) + 7}{x - 2} = 2 + \frac{7}{x - 2}$$

យើងនឹងរកចំនួន $M > 0$ ដែល $f(x) > M$ ។

ដើម្បីឱ្យ $f(x) > M$ យើងគ្រាន់តែឱ្យ $\frac{7}{x - 2} > M$ និង $x > 2$

គេទាញបាន $0 < x - 2 < \frac{7}{M}$ យក $\delta = \frac{7}{M} > 0$ នោះ $0 < x - 2 < \delta$

សម្រាយនេះបញ្ជាក់ថាគ្រប់ចំនួន $M > 0$ មាន $\delta = \frac{7}{M} > 0$

ដែល $0 < |x - 2| < \delta$ នាំឱ្យ $f(x) > M$ ។ ដូច្នេះនេះ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ ។

លំហាត់អនុវត្ត

ចូរស្រាយបញ្ជាក់លីមីតខាងក្រោមតាមនិយមន័យ ៖

$$១/ \lim_{x \rightarrow 3} (2x + 1) = 7$$

$$២/ \lim_{x \rightarrow -2} (x + 5) = 3$$

$$៣/ \lim_{x \rightarrow 2} (3x + 2) = 8$$

$$៤/ \lim_{x \rightarrow 1} (-2x + 7) = 5$$

$$៥/ \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 5$$

$$៦/ \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x + 4) = 7$$

$$៧/ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x + 1}{x^2 + 1} = 2$$

$$៨/ \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^3 + 1} = 3$$

$$៩/ \lim_{x \rightarrow 2} (3^x + 1) = 10$$

$$១០/ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x) = 1$$

$$១១/ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 1}{x} = +\infty$$

$$១២/ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x + 1}{x - 1} = +\infty$$

$$១៣/ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + 2}{x - 2} = -\infty$$

$$១៤/ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x}{x - 1} = -\infty$$

$$១៥/ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 4x + 5}{(x - 1)^2} = +\infty$$

$$១៦/ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 4} = -\infty$$

$$១៧/ \lim_{x \rightarrow 8} (\sqrt[3]{x} + 1) = 3$$

$$១៨/ \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 2x) = 12$$

២-លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់អនន្ត

និយមន័យ១ ៖ អនុគមន៍ f មានលីមីត L កាលណា x ខិតទៅ $+\infty$

ឬ $-\infty$ បើគ្រប់ចំនួន $\varepsilon > 0$ មានចំនួន $N > 0$ ដែល $x > N$

ឬ $x < -N$ នាំឱ្យ $|f(x) - L| < \varepsilon$ ។

គេកំណត់សរសេរ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ ឬ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ ។

ឧទាហរណ៍ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{4x+1}{2x+3}$

ចូរស្រាយថា $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ និង $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ ។

គេមាន $f(x) = \frac{4x+1}{2x+3} = \frac{2(2x+3)-5}{2x+3} = 2 - \frac{5}{2x+3}$

នាំឱ្យ $|f(x) - 2| = \frac{5}{|2x+3|}$ ចំពោះ $|f(x) - 2| < \varepsilon, \varepsilon > 0$

គេបាន $\frac{5}{|2x+3|} < \varepsilon$ នាំឱ្យ $|2x+3| > \frac{5}{\varepsilon}$

គេទាញ $\begin{cases} 2x+3 > \frac{5}{\varepsilon} \\ 2x+3 < -\frac{5}{\varepsilon} \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} x > \frac{5}{2\varepsilon} - \frac{3}{2} \\ x < -\frac{5}{2\varepsilon} - \frac{3}{2} \end{cases}$

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

ហេតុនេះ គ្រប់ $\varepsilon > 0$ មាន $A = \frac{5}{2\varepsilon}$ ឬ $A = \frac{5}{2\varepsilon} + \frac{3}{2}$

ដែល $x > A$ ឬ $x < -A$ នាំឱ្យ $|f(x) - 2| < \varepsilon$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ និង $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ ។

និយមន័យ២ ៖ អនុគមន៍ f មានលីមីត $+\infty$ កាលណា x ខិតទៅ

$+\infty$ បើគ្រប់ចំនួន $M > 0$ មានចំនួន $N > 0$ ដែល $x > N$

នាំឱ្យ $f(x) > M$ ។

គេកំណត់សរសេរ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ។

និយមន័យ៣ ៖ អនុគមន៍ f មានលីមីត $+\infty$ កាលណា x ខិតទៅ

$-\infty$ បើគ្រប់ចំនួន $M > 0$ មានចំនួន $N > 0$ ដែល $x < -N$

នាំឱ្យ $f(x) > M$ ។

គេកំណត់សរសេរ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ។

លំហាត់អនុវត្ត

ចូរស្រាយបញ្ជាក់លីមីតខាងក្រោមតាមនិយមន័យ ៖

$$១/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+2}{x+1} = 3$$

$$២/ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-3x}{x+2} = -3$$

$$៣/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+2}{1-x} = -5$$

$$៤/ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x+1}{2x+1} = 2$$

$$៥/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$$

$$៦/ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x+1}{1-4x} = -2$$

$$៧/ \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x+3) = -\infty$$

$$៨/ \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x+3) = -\infty$$

$$៩/ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2+4) = +\infty$$

$$១០/ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$$

$$១១/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-x^2}{3x+5} = -\infty$$

$$១២/ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x+1} = -\infty$$

$$១៣/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x+1} = 0$$

$$១៤/ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7}{x+1} = 0$$

$$១៥/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+4x}{x^2+4x+5} = 1$$

$$១៦/ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{(x-2)^2} = 0$$

៣-ប្រមាណវិធីលីមីត

បើ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ និង $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = N$

ដែល L, M និង N ជាចំនួនពិតនោះគេបាន ៖

ក/ $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x) - h(x)] = L + M - N$

ខ/ $\lim_{x \rightarrow a} [\alpha f(x) + \beta g(x) - \gamma h(x)] = \alpha L + \beta M - \gamma N$

គ/ $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)h(x)] = L.M.N$

ឃ/ $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{L}{M}$ ដែល $M \neq 0$

៤-លីមីតនៃអនុគមន៍អសនិទាន

រូបមន្ត ៖

1/ $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ ដែល $a \geq 0$ និង $n \in \mathbb{IN}, n \geq 2$

2/ $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ ដែល $a < 0$ និង $n \in \mathbb{IN}, n \geq 2$ (ចំនួនគត់សេស)

3/ $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$ ដែល $a \geq 0$ និង $n \in \mathbb{IN}, n \geq 2$

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

ឧទាហរណ៍ គណនាលីមីត

$$១/ \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^3 + 1} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 1)} = \sqrt{2^3 + 1} = \sqrt{9} = 3$$

$$\begin{aligned} ២/ \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt[3]{\frac{x^2 + 5x + 3}{x + 5}} &= \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 5x + 3}{x + 5}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{9 + 15 + 3}{5 + 3}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ៣/ \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x^3 + 4x} + \sqrt[3]{x^2 + 3x - 2}) \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 4x)} + \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x - 2)} \\ &= \sqrt{8 + 8} + \sqrt[3]{4 + 6 - 2} = 4 + 2 = 6 \end{aligned}$$

លំហាត់អនុវត្តន៍ ៖

គណនាលីមីត ៖

$$1/ \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt[3]{\frac{x^2 - 3x + 4}{2x^2 - x - 1}}$$

$$2/ \lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{\frac{x^2 - 9}{2x^2 + 7x + 3}}$$

$$3/ \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt[3]{\frac{x + 4}{-7x + 1}}$$

$$4/ \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + 2}}}$$

៥-លីមីតនៃអនុគមន៍បណ្តាក់

បើ f និង g ជាអនុគមន៍ពីរដែលមានលីមីត $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$

និង $\lim_{x \rightarrow L} f(x) = f(L)$ នៅ៖ $\lim_{x \rightarrow a} f[g(x)] = f(L)$ ។

ឧទាហរណ៍១ គណនាលីមីត $\lim_{x \rightarrow 2} \ln\left(\frac{4x+7}{x+3}\right)$

តាង $g(x) = \frac{4x+7}{x+3}$ និង $f(x) = \ln x$ នៅ៖ $f[g(x)] = \ln\left(\frac{4x+7}{x+3}\right)$

គឺមាន $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x+7}{x+3} = \frac{8+7}{2+3} = 3$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow 2} f[g(x)] = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = \ln 3$ ។

ឧទាហរណ៍២ គណនាលីមីត $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{4x+7}{x+3}\right)$

តាង $g(x) = \frac{4x+7}{x+3}$ និង $f(x) = \ln x$ នៅ៖ $f[g(x)] = \ln\left(\frac{4x+7}{x+3}\right)$

គឺមាន $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x+7}{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + \frac{7}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = \frac{4}{1} = 4$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f[g(x)] = \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \ln x = \ln 4 = 2\ln 2$ ។

៦-លីមីតតាមការប្រៀបធៀប

1/ បើ f និង g ជាអនុគមន៍ពីរ ហើយ A ជាចំនួនពិតមួយដែល

ចំពោះ $\forall x \geq A: f(x) \geq g(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

នោះ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ។

2/ បើ f និង g ជាអនុគមន៍ពីរ ហើយ A ជាចំនួនពិតមួយដែល

ចំពោះ $\forall x \geq A: f(x) \leq g(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

នោះ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ។

3/ បើ f, g និង h ជាអនុគមន៍បី ហើយ A ជាចំនួនពិតមួយដែល

$\forall x \geq A: g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lambda$

នោះ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lambda$ ។ (λ ជាចំនួនពិត) ។

៤/ បើ f និង g ជាអនុគមន៍ពីរ ហើយ A ជាចំនួនពិតមួយដែល

$\forall x \geq A: f(x) \leq g(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lambda$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lambda'$

នោះ $\lambda \leq \lambda'$ ។ (λ និង λ' ជាចំនួនពិត) ។

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

ឧទាហរណ៍ គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍ដែល $f(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

គណនាលីមីត $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ។

$$\text{គេមាន } f(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

ដោយគ្រប់ $x > 0$ គេមាន $\sqrt{x+1} > \sqrt{x}$

នោះគេទាញ $2\sqrt{x} < \sqrt{x+1} + \sqrt{x} < 2\sqrt{x+1}$

$$\text{ឬ } \frac{1}{2\sqrt{x+1}} < \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{ឬ } \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+1}} < \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} < \frac{1}{2} \quad \text{នោះ: } \frac{1}{2\sqrt{x+1}} < f(x) < \frac{1}{2}$$

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \frac{1}{2} \quad \text{។}$$

៧-លីមីតរាងមិនកំណត់

ក/លីមីតដែលមានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

វិធាន ៖ ដើម្បីគណនាលីមីតដែលមានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$ គេត្រូវ
បំបែកភាគយក និង ភាគបែង ជាផលគុណកត្តា ហើយសម្រួលកត្តា
រួមចោល រួគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី។

ឧទាហរណ៍ គេឲ្យអនុគមន៍ f ដែល $f(x) = \frac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{\cos^2 x}$

គណនាលីមីត $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$?

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } f(x) &= \frac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{\cos^2 x} \\ &= \frac{(2\sin^2 x - 2\sin x) - (\sin x - 1)}{1 - \sin^2 x} \\ &= \frac{(\sin x - 1)(2\sin x - 1)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \frac{1 - 2\sin x}{1 + \sin x} \end{aligned}$$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - 2\sin x}{1 + \sin x} = \frac{1 - 2}{1 + 1} = -\frac{1}{2} \quad \text{។}$$

ខ/លីមីតដែលមានរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$

វិធាន ៖ ដើម្បីគណនាលីមីតរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$ គេត្រូវដាក់តួដែលមាន

ដឺក្រេធំជាងគេនៅភាគយក និង ភាគបែងជាកត្តារួមសិន ហើសម្រួល

កត្តារួមចោល រួចគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី ។

ឧទាហរណ៍ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$$f(x) = \frac{\sqrt{4x^2 + 1} + 7x + 2}{3x + 1} \quad \text{គណនាលីមីត } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad ?$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1} + 7x + 2}{3x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2(4 + \frac{1}{x^2})} + x(7 + \frac{2}{x})}{x(3 + \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} + 7 + \frac{2}{x})}{x(3 + \frac{1}{x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} + 7 + \frac{2}{x}}{3 + \frac{1}{x}} = \frac{2 + 7}{3} = 3$$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 \quad ?$

គ/លីមីតដែលមានរាងមិនកំណត់ $+\infty - \infty$

វិធាន ៖ ដើម្បីគណនាលីមីតរាងមិនកំណត់ $+\infty - \infty$ គេត្រូវដាក់តួដែលមានដីក្រេធំជាងគេ ជាកត្តារួមសិន ហើសម្រួលកត្តារួមចោល រួចគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី ។

ឧទាហរណ៍ គេមាន $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x} - \sqrt{x^2 - 3x + 1}$

គណនាលីមីត $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ។

មាន $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x} - \sqrt{x^2 - 3x + 1}$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{(x^2 + 5x)^2} - \sqrt{(x^2 - 3x + 1)^2}}{\sqrt{x^2 + 5x} + \sqrt{x^2 - 3x + 1}} \\ &= \frac{x^2 + 5x - x^2 + 3x - 1}{\sqrt{x^2(1 + \frac{5}{x})} + \sqrt{x^2(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2})}} \\ &= \frac{x(8 - \frac{1}{x})}{x(\sqrt{1 + \frac{5}{x}} + \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}})} = \frac{8 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{5}{x}} + \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{8}{1+1} = 4$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍ ៖

១-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 1}{2x + 3}$

ខ/ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x + 7}{12x - 5}$

គ/ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2x - 1}{2e^x + 1}$

ឃ/ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 4x - 1}{e^x + 2x + 3}$

ង/ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{(2x + 1)^2}{2x^2 + 3x}$

ច/ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4e^x + 1)^2}{(2e^x + 1)(e^x + x)}$

២-រកតម្លៃ a និង b ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + ax} - bx - 1) = 3$

ខ/ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a - 1)x^2 + 2bx + 3}{ax + b} = 4$

គ/ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + ax^2} - \sqrt[3]{bx^3 - 5x^2 + 1}) = 2$

៣-គេឲ្យពហុធា $P(x) = ax^2 + bx + c$ ដែល $a, b, c \in \mathbb{R}$

កំណត់លេខមេគុណ a, b, c ដោយដឹងថា ៖

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{x^2 + 1} = 2$ (i) និង $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{P(x)}{x^2 - 1} = 2$ (ii)

៨-លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

ទ្រឹស្តីបទ ៖ បើ x ជារង្វាស់មុំ ឬ ផ្ចិតជារ៉ាដ្យង់នោះគេបាន ៖

$$1/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$2/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

$$3/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

សម្រាយបញ្ជាក់ ៖

តាង φ ជាមុំគិតជារ៉ាដ្យង់ ដែល $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$

តាង S_{OAT} , $S_{\widehat{OAP}}$ និង S_{OAP}

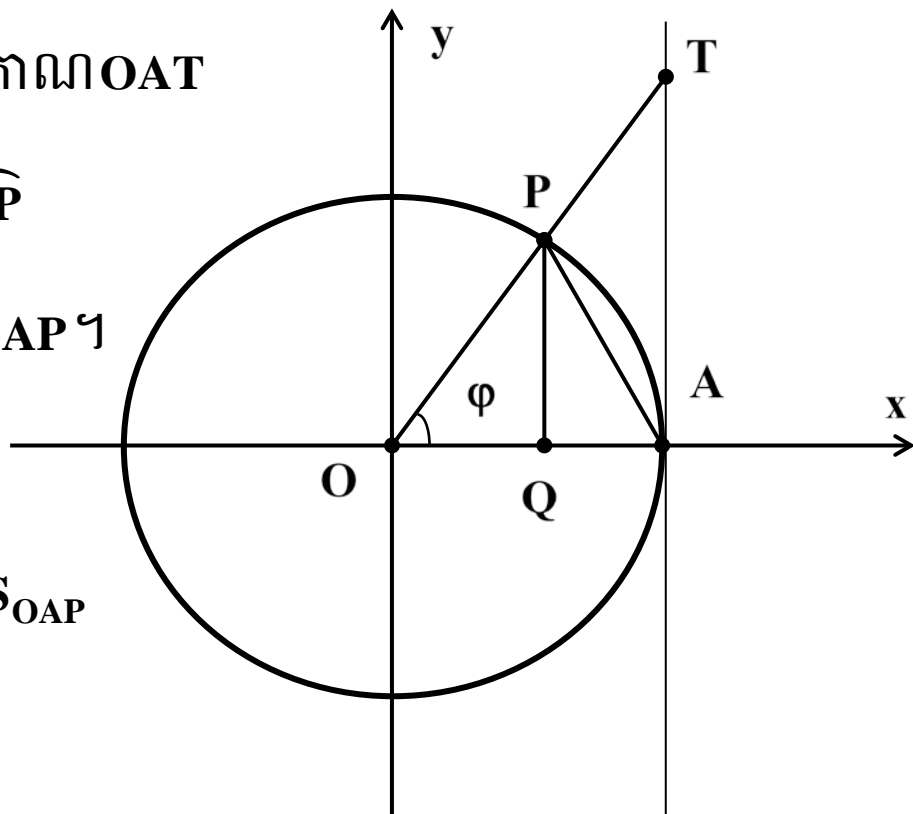
រៀងគ្នាជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ OAT

ផ្ទៃក្រឡាចំរៀកថាស \widehat{OAP}

និង ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ OAP ។

តាមរូបខាងលើ

គេមាន $S_{OAT} \geq S_{\widehat{OAP}} \geq S_{OAP}$



លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

ដោយ $S_{OAT} = \frac{1}{2} \times 1 \times \tan \varphi$, $S_{OAP} = \frac{1}{2} \times 1^2 \times \varphi$

និង $S_{OAP} = \frac{1}{2} \sin \theta$ នោះគេបាន $\frac{1}{2} \tan \varphi \geq \frac{1}{2} \varphi \geq \frac{1}{2} \sin \varphi$

ឬ $\tan \varphi \geq \varphi \geq \sin \varphi$ ដោយ $\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$ នោះ $\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \geq \varphi \geq \sin \varphi$

គេទាញ $\cos \varphi \leq \frac{\sin \varphi}{\varphi} \leq 1$ ។

បើ $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$ នោះ $0 < -\varphi < \frac{\pi}{2}$ នោះវិសមភាពខាងលើទៅជា

$$\cos(-\varphi) \leq \frac{\sin(-\varphi)}{-\varphi} \leq 1 \quad \text{ឬ} \quad \cos \varphi \leq \frac{\sin \varphi}{\varphi} \leq 1$$

ហេតុនេះគេបាន $\cos \varphi \leq \frac{\sin \varphi}{\varphi} \leq 1$ ចំពោះគ្រប់ $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$

ដោយ $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \cos \varphi = 1$ នោះ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi}{\varphi} = 1$ ។

ដោយជំនួស φ ជា x នោះគេបាន $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ពិត ។

ម្យ៉ាងទៀត $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 1 \times 0 = 0$$

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$ ពិត ។

តាមរូបមន្ត $\tan x = \frac{\sin x}{x}$

គេបាន $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \times 1 = 1$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ ។

សម្គាល់ ៖

1/ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

2/ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$

ឧទាហរណ៍ ៖ គណនាលីមីត

1/ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 0 + 1 = 1$

2/ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \times 1^2 = \frac{1}{2}$

3/ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \tan x}{x + \tan 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{\tan x}{x}}{1 + \frac{\tan 3x}{3x} \cdot 3} = \frac{1 + 1}{1 + 3} = \frac{1}{2}$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍ ៖

១-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

$$1/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \sin 3x}{x^2}$$

$$2/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 2x}{x}$$

$$3/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 6x}$$

$$4/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \sin x}{x + \sin x}$$

$$5/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \sin 3x}{\sin^2 2x}$$

$$6/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \tan x}{x + \tan x}$$

$$7/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{\sin x \sin 6x}$$

$$8/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 3\sin x}{\sin 2x}$$

$$9/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x + \sin 2x}$$

$$10/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$$

$$11/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 - x \sin x}$$

$$12/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x + \tan x}$$

$$13/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\tan x}$$

$$14/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{x^2}$$

$$15/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 3x}{x^2}$$

$$16/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \sqrt{\cos 2x}}$$

$$17/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{x^2}$$

$$18/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sin^2 x}{1 - \cos 2x}$$

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

២-កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីបំពេញលក្ខខណ្ឌលីមីតខាងក្រោម ៖

$$1/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{x^2} = 8$$

$$2/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = 5$$

$$3/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax + \sin(a+1)x}{x} = 3$$

$$4/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2\cos ax}{x^2} = 4$$

$$5/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+1)x + \sin(a-1)x}{x} = 6$$

៣-កំណត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឱ្យ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + b \cos x}{x^2} = 1$ ។

៤-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

$$1/ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x^2 - 1}$$

$$2/ \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x^2) \tan \frac{\pi x}{2}$$

$$3/ \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos 2x}{(\pi - x)^2}$$

$$4/ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x}$$

$$5/ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos 2\pi x}{(1 - x)^2}$$

$$6/ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \sin \frac{\pi x}{4}}{(2 - x)^2}$$

៥-កំណត់ ដើម្បីឱ្យបាន $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + a \cos x + \cos 2x}{x^2} = b$

(a និង b ជាពីរចំនួនពិត) ។

៩-លីមីតនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

រូបមន្ត ៖

$$1/ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$2/ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$3/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$4/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$$5/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$6/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

(ដែល n ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន) ។

១០-លីមីតនៃអនុគមន៍លោការីតនេពែ

រូបមន្ត ៖

$$1/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$2/ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$3/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$4/ \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$$5/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$6/ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$$

(ដែល n ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន) ។

លំហាត់គំរូ

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

$$1/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6e^x + x}{2e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(6 + \frac{x}{e^x})}{e^x(2 + \frac{1}{e^x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 + \frac{x}{e^x}}{2 + \frac{1}{e^x}} = \frac{6}{2} = 3$$

$$2/ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \ln x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 0 + 1 = 1$$

$$3/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \ln x}{x + \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2 - \frac{\ln x}{x})}{x(1 + \frac{\ln x}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{\ln x}{x}}{1 + \frac{\ln x}{x}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$4/ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} + 3}{e^x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} + 3)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 1)} = \frac{0 + 3}{0 + 1} = 3 \quad \text{[ព្រោះ: } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{]}$$

$$\begin{aligned} 5/ \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x - \ln(2e^{2x} + 1)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^{2x}) - \ln(2e^{2x} + 1)] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(\frac{e^{2x}}{2e^{2x} + 1}\right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{2 + \frac{1}{e^{2x}}}\right) = \ln \frac{1}{2} \end{aligned}$$

លំហាត់អនុវត្តន៍ ៖

១-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

$$1/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x + 3}{e^x + 1}$$

$$2/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^x + 1}{2e^x - 3}$$

$$3/ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x - x + 1}{e^x + 2x + 3}$$

$$4/ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + x}{3e^x + 2x - 1}$$

$$5/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{(2e^x + 1)(e^x - 3)}$$

$$6/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + x}$$

២-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

$$1/ \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + 2x - x \ln x)$$

$$2/ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x} + \ln x}{\cot x}$$

$$3/ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right) \sin x$$

$$4/ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{x \ln x}$$

$$5/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$$

$$6/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1 - \ln x}{4x + 1}$$

$$7/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \ln x}{x + \ln x}$$

$$8/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + xe^x}{1 + 2xe^x}$$

$$9/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} (2x + \ln x)$$

$$10/ \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln x - \ln(2x + 1)]$$

១១-ការគណនាលីមីតពង្សៀតក្នុងរូបសម្ព័ន្ធ

ក-ការគណនាលីមីតដោយប្រើរូបមន្ត ៖

$$1/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$2/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad \text{ដែល } a > 0 \text{ និង } a \neq 1 \quad \forall$$

លំហាត់គំរូ គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

$$1/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \times \frac{\sin x}{x} = 1 \times 1 = 1$$

$$\begin{aligned} 2/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos 2x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - (1 - 2\sin^2 x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \\ &= 1 + 2 \times 1^2 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a^x - 1) - (b^x - 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b^x - 1}{x} \\ &= \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} \end{aligned}$$

ខ-ការគណនាលីមីតដោយប្រើរូបមន្ត ៖

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

លំហាត់គំរូ គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

$$1/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \tan 2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \tan 2x)}{\tan 2x} \cdot \frac{\tan 2x}{2x} \cdot 2 = 1 \times 1 \times 2 = 2$$

$$2/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 2\sin^2 x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 2\sin^2 x)}{(-2\sin^2 x)} \times \frac{\sin^2 x}{x^2} \times (-2) = -2$$

$$3/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 4x - x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 4x - x^2)}{4x - x^2} \times \frac{4x - x^2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 4x - x^2)}{4x - x^2} \cdot (4 - x) = 1 \times 4 = 4$$

$$4/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3 - 2e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2(1 - e^x))}{2(1 - e^x)} \times \frac{-2(e^x - 1)}{x} = -2$$

$$5/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[(1 + ax)(1 + bx)]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + ax) + \ln(1 + bx)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + ax)}{ax} \cdot a + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + bx)}{bx} \cdot b = a + b \quad \checkmark$$

គ-ការគណនាលីមីតដោយប្រើរូបមន្ត ៖

$$\begin{aligned} 1/ \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} &= e \\ 2/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= e \quad \text{ដែល } e = 2.71828... \end{aligned}$$

លំហាត់គំរូ គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

$$1/ \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x/2}} \right]^2 = e^2 = \sqrt{e}$$

$$2/ \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \sin \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \sin \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\sin \frac{x}{2}}} \right]^{\frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \cdot \frac{1}{2}} = e^2 = \sqrt{e}$$

$$3/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \left[\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}} \right]^2 = e^2$$

$$4/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + \left(\frac{-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}} \right]^{\frac{-2x}{x+1}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \quad \text{។}$$

លំហាត់អនុវត្តន៍ ៖

១-គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

$$1/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{2x} - 2}{x}$$

$$2/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^{-\sin x}}{x}$$

$$3/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin^2 x} - \cos 4x}{x^2}$$

$$4/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{1 - \cos 2x}}{x^2}$$

$$5/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax^2} - e^{bx^2}}{2}$$

$$6/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2 - 2x} - e^{x^2 + 2x}}{x}$$

$$7/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} + e^{2x} - 2}{x^2}$$

$$8/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan^2 x} - e^{\sin^2 x}}{1 + x \sin 2x - \cos 2x}$$

$$9/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + e^{x^2}}}{\sin^2 x}$$

$$10/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{2 - e^{x^2}} - 1}{x^2}$$

២-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

$$1/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2 \tan 3x)}{\sin x}$$

$$2/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - e^{\sin^2 x})}{x \tan x}$$

$$3/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x) + \ln(\cos 2x)}{x^2}$$

$$4/ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^3 - 3x + 3)}{(x - 1)^2}$$

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

៣-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

$$1/ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \right)^{\frac{2}{x}}$$

$$2/ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$3/ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{x}{x - \sin x}}$$

$$4/ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x^2 + x + 3}{x + 3} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$$

$$5/ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos x \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$6/ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{x^3}}$$

$$7/ \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + x + 3}{x + 4} \right)^{\frac{1}{x-1}}$$

$$8/ \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x + 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x}{x-2}}$$

$$9/ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\tan x \right)^{\tan 2x}$$

$$10/ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\sin x \right)^{\frac{1}{(\pi-x)^2}}$$

$$11/ \lim_{x \rightarrow 1} \left(\sin \frac{\pi x}{2} \right)^{\frac{x}{(1-x)^2}}$$

$$12/ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x$$

$$13/ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 - 3x + 4} \right)^x$$

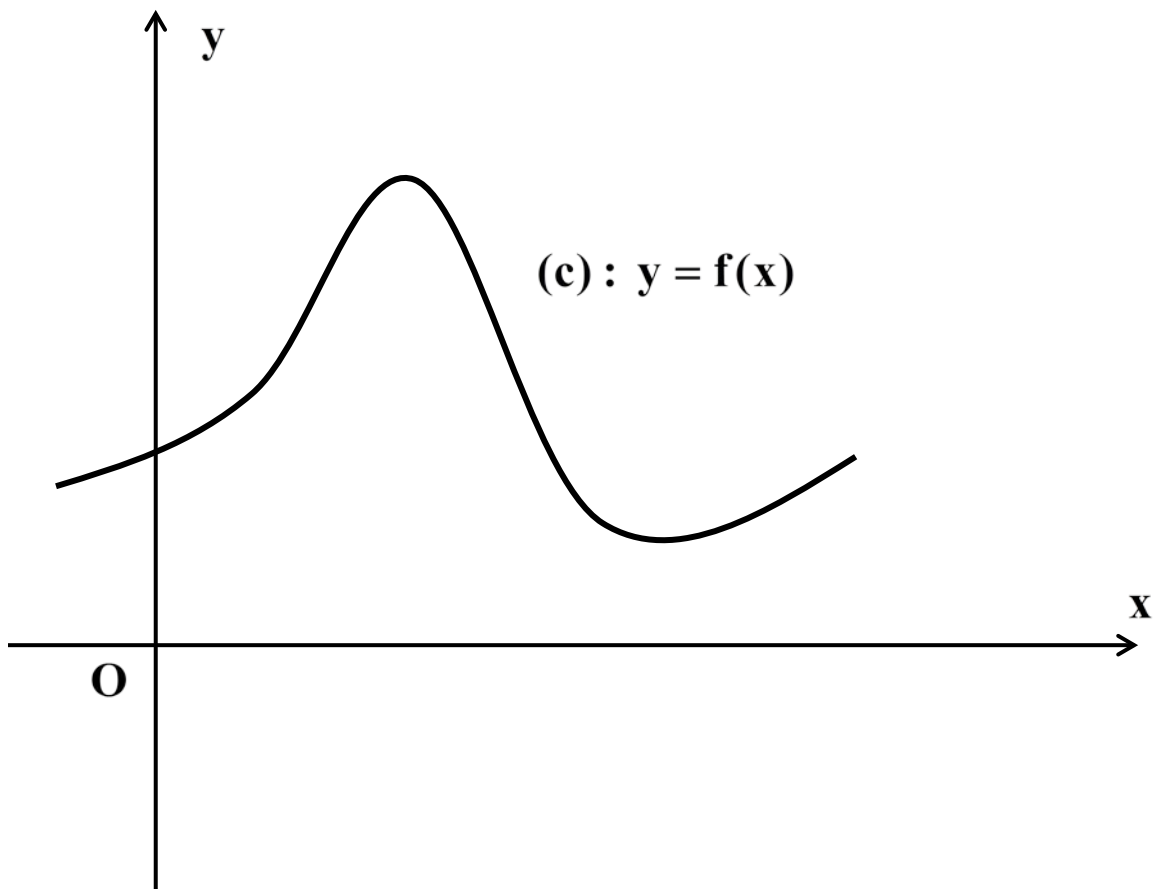
$$14/ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^x + x}{e^x + 1} \right)^{e^x}$$

ជំពូកទី២

ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

១-សញ្ញាណនៃអនុគមន៍ជាប់

កាលណាគេគូសក្រាបនៃធនុគមន៍ $y = f(x)$ លើចន្លោះ I មួយនៃដែនកំណត់ ដោយមិនលើកខ្មៅដៃ នោះគេបានគំនូស ជាខ្សែកោងជាប់ គេថាអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់គ្រប់ចំណុចនៃចន្លោះ I ។



២-ភាពជាប់ត្រង់ចំណុច

និយមន័យ អនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុច $x = a$

កាលណា f បំពេញលក្ខខណ្ឌទាំងបីខាងក្រោម ៖

1/ f កំណត់ចំពោះ $x = a$

2/ f មានលីមីតកាលណា x ខិតជិត a

3/ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ។

ឧទាហរណ៍១ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$

តើអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ចំណុច $x = 2$ ឬទេ ?

ចំពោះ $x = 2$ គេបាន $f(2) = \sqrt{2^3 + 1} = \sqrt{9} = 3$ កំណត់

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^3 + 1} = \sqrt{2^3 + 1} = 3$$

គេបាន $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 3$ ។

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុច $x = 2$ ។

ឧទាហរណ៍២

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + 6} & \text{បើ } x \geq 1 \\ \frac{2x - 11}{x - 2} & \text{បើ } x < 1 \end{cases}$$

តើ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = 1$ ឬទេ ?

ចំពោះ $x = 1$ គេបាន $f(1) = \sqrt{1^2 + 2 + 6} = \sqrt{9} = 3$ កំណត់

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x^2 + 2x + 6} = \sqrt{1 + 2 + 6} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 5}{x - 2} = \frac{2 - 5}{1 - 2} = 3$$

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$$

$$\text{នោះ } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 3 \text{ ។}$$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុច $x = 1$ ។

ឧទាហរណ៍៣

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{1+x} & \text{បើ } x \geq 0 \\ \frac{2\sqrt{x^2} - \sin x}{x} & \text{បើ } x < 0 \end{cases}$$

តើ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$ ឬទេ ?

ចំពោះ $x=0$ គេបាន $f(0) = \frac{1-0}{1+0} = 1$ កំណត់

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-x}{1+x} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2\sqrt{x^2} - \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2|x| - \sin x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2x - \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-2 - \frac{\sin x}{x}\right) = -3 \end{aligned}$$

ដោយ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ នៅ៖ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ គ្មានលីមីត ។

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុច $x=0$ ។

ឧទាហរណ៍៤

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 - 2\cos 2ax}{x^2} & \text{បើ } x \neq 0 \\ 9 & \text{បើ } x = 0 \end{cases}$$

កំណត់ចំនួនពិត a ដើម្បីឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = 0$ ។

ចំពោះ $x = 0$ គេបាន $f(0) = 9$ កំណត់

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2\cos 2ax}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sin^2 ax}{x^2} = 4a^2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin ax}{ax} \right)^2 = 4a^2 \end{aligned}$$

ដើម្បីឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុច $x = 0$ គេគ្រាន់តែឲ្យ

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad \text{ឬ} \quad 4a^2 = 9 \quad \text{នោះ} \quad a = \pm \frac{3}{2} \quad \text{។}$$

$$\text{ដូចនេះ} \quad a = \pm \frac{3}{2} \quad \text{។}$$

៣-លក្ខណៈភាពជាប់នៃអនុគមន៍

បើ f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុច $x = a$ នោះគេបាន ៖

1/ $f(x) + g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ ចំណុច $x = a$ ។

2/ $f(x) - g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ ចំណុច $x = a$ ។

3/ $f(x) \cdot g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ ចំណុច $x = a$ ។

4/ $\lambda f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ ចំណុច $x = a$ ។ (λ ជាចំនួនពិត)

5/ $\frac{f(x)}{g(x)}$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ ចំណុច $x = a$ ដែល $g(a) \neq 0$ ។

៤-ភាពជាប់លើចន្លោះ

និយមន័យ ៖

1/ អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបើក (a, b) លុះត្រាតែ f ជាប់ចំពោះ

គ្រប់តម្លៃ x នៃចន្លោះបើកនោះ ។

2/ អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a, b]$ លុះត្រាតែ f ជាប់លើ (a, b)

និងមានលីមីត $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ និង $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ ។

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

ឧទាហរណ៍ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x \ln x & \text{បើ } x > 0 \\ 1 & \text{បើ } x = 0 \\ \frac{\sin \pi}{1-x} & \text{បើ } x < 1 \\ \pi & \text{បើ } x = 1 \end{cases}$$

ចូរសិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f លើចន្លោះ $[0,1]$ ។

យើងពិនិត្យឃើញថា f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $(0,1)$ ។

គេមាន $f(0) = 1$ និង $f(1) = \pi$

$$\text{ហើយ } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x \ln x) = 1 = f(0)$$

$$\text{និង } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin \pi x}{1-x}$$

តាង $1-x = t$ នោះ $x = 1-t$

ហើយកាលណា $x \rightarrow 1^-$ នោះ $t \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\pi - \pi t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\pi t)}{(\pi t)} \cdot \pi = \pi = f(1)$$

ដូចនេះ អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះ $[0,1]$ ។

៥-ភាពជាប់នៃអនុគមន៍បណ្តាក់

អនុគមន៍ g ជាប់ត្រង់ $x = a$ និងអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x = g(a)$

នោះអនុគមន៍បណ្តាក់ $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ ជាប់ត្រង់ $x = a$ ។

ឧទាហរណ៍ គេឲ្យអនុគមន៍ g កំណត់ដោយ $g(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$

និង $f(x) = \ln x$ ។

តើអនុគមន៍ $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ ជាប់ត្រង់ $x = 1$ ដែរឬទេ ?

គេមាន $g(1) = \frac{4}{1^2 + 1} = 2$

ហើយ $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x}{x^2 + 1} = \frac{4}{1 + 1} = 2 = g(1)$ នោះ g ជាអនុគមន៍

ជាប់ត្រង់ $x = 1$ ។

ហើយបើ $x = g(1) = 2$ នោះ $f(2) = \ln 2$

និង $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \ln x = \ln 2 = f(2)$ នោះ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = 2$

សម្រាយខាងលើបញ្ជាក់ថា $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ ជាប់ត្រង់ $x = 1$ ។

៦-អនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់

បើ f ជាអនុគមន៍មិនកំណត់ត្រង់ $x = a$ និងមានលីមីត $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lambda$

នោះអនុគមន៍បន្លាយនៃ f តាមភាពជាប់ត្រង់ $x = a$ កំណត់ដោយ ៖

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{បើ } x \neq a \\ \lambda & \text{បើ } x = a \end{cases}$$

ឧទាហរណ៍១ គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

រកអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x = 0$ ។

គឺមាន $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ ដោយ $\sin x = \tan x \cdot \cos x$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x \cdot \tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $g(x) = \begin{cases} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} & \text{បើ } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{បើ } x = 0 \end{cases}$

ឧទាហរណ៍២

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{\sin x + x^2 \ln |x|}{x}$ ដែល $x \neq 0$ ។

តើ f អាចមានអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់ ត្រង់ $x = 0$ ឬទេ ?

បើមានចូរកំណត់អនុគមន៍នោះ ។

$$\begin{aligned} \text{គឺមាន } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x^2 \ln |x|}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} + x \ln |x| \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln |x|) = 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

ដូចនេះ f អាចមានអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់ ត្រង់ $x = 0$ ហើយបើ

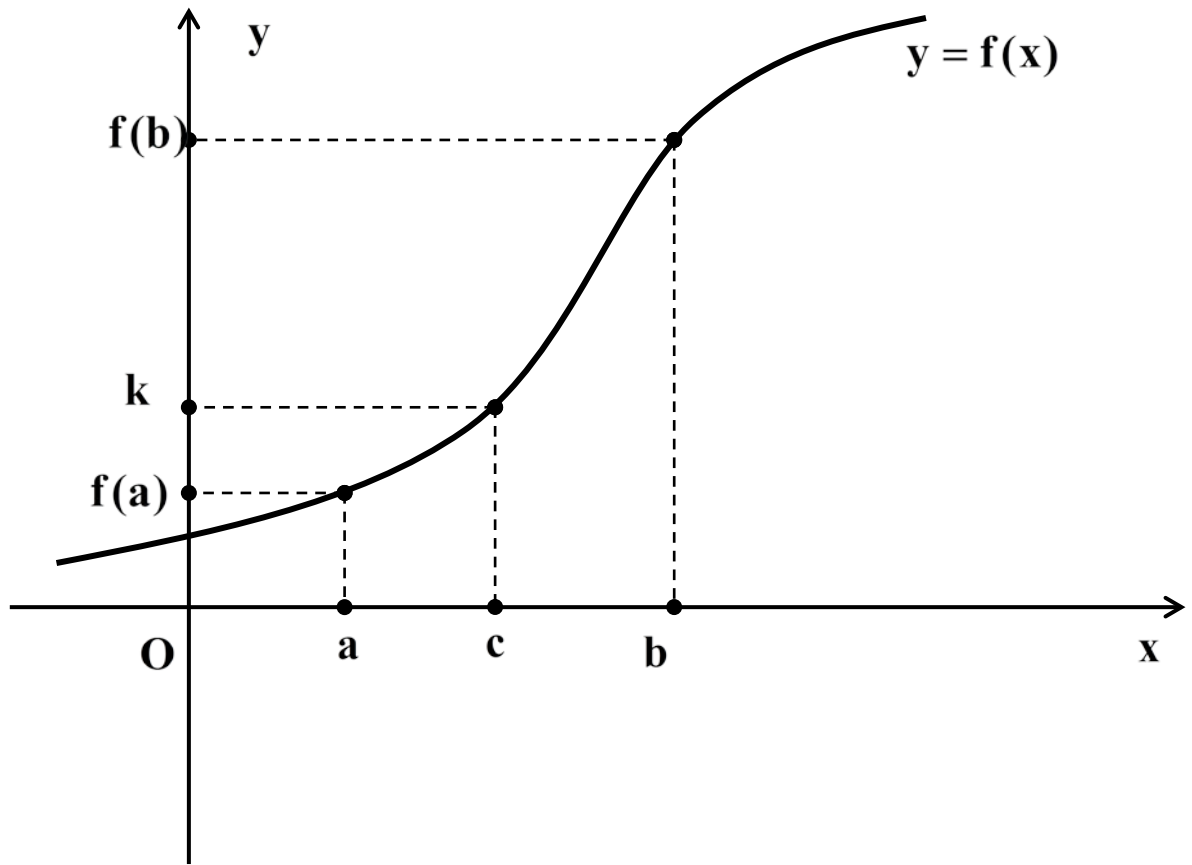
g ជាបន្លាយនៃអនុគមន៍ f តាមភាពជាប់ត្រង់ $x = 0$ នោះគេបាន ៖

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x + x^2 \ln |x|}{x} & \text{បើ } x \neq 0 \\ 1 & \text{បើ } x = 0 \end{cases}$$

៧-ទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល

ទ្រឹស្តីបទ ៖ បើអនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ និង k ជាចំនួនមួយនៅចន្លោះ $f(a)$ និង $f(b)$ នោះមានចំនួនពិត c មួយយ៉ាងតិចក្នុងចន្លោះបិទ $[a,b]$ ដែល $f(c) = k$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ ៖



អនុគមន៍ f ជាប់ និង កើនដាច់ខាត លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ ។

f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាត មានន័យថាមានពីរចំនួន α, β នៃ $[a,b]$

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

ដែល $\alpha < \beta$ នាំឱ្យ $f(\alpha) < f(\beta)$ ។ ឱ្យចំនួន k នៅចន្លោះ $f(a)$ និង $f(b)$ ($f(a) < k < f(b)$) និង f ជាអនុគមន៍ជាប់ តាមទ្រឹស្តីបទបញ្ជាក់ថាមានចំនួន c នៅចន្លោះ a និង b ដែល $f(c) = k$ ។

ឧបមាថាមានចំនួន c' មួយទៀតផ្សេងពី c ដែល $f(c') = k$ នោះគេបាន $f(c) = f(c')$ ដែលផ្ទុយពីសម្មតិកម្មដែលថា f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាត ដូចនេះមានចំនួន c តែមួយគត់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(c) = k$ មានន័យថា សមីការ $f(x) = k$ មានចម្លើយតែមួយគត់ ។

វិបាក ៖ បើអនុគមន៍ f ជាប់ហើយកើនដាច់ខាត ឬ ចុះដាច់ខាតលើចន្លោះបិទ $[a, b]$ នោះចំពោះគ្រប់ចំនួន k នៅចន្លោះ $f(a)$ និង $f(b)$ សមីការ $f(x) = k$ មានចម្លើយតែមួយគត់នៅចន្លោះ $[a, b]$ ។

សម្គាល់ ៖ ទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលអាចប្រើបានចំពោះ $k = 0$ ជាពិសេស បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a, b]$ និង $f(a) \cdot f(b) < 0$ នោះមានចំនួន c មួយយ៉ាងតិចនៃ $[a, b]$ ដែល $f(c) = 0$ ។

ឧទាហរណ៍

ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $x \tan x = \cos x$ យ៉ាងហោច

ណាស់មានឫសជាចំនួនពិតមួយនៅចន្លោះ $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ។

តាំង $f(x) = x \tan x - \cos x$

គេមាន $f(0) = 0 - 1 = -1 < 0$

និង $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi - 2\sqrt{2}}{4} = \frac{3.14 - 2 \times 1.41}{4} = \frac{0.32}{4} = 0.80 > 0$

គេបាន $f(0) \cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលយ៉ាងហោច

ណាស់មានចំនួនពិត c មួយនៃចន្លោះ $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ដែល $f(c) = 0$ ។

ដូចនេះថាសមីការ $x \tan x = \cos x$ យ៉ាងហោចណាស់មានឫសជា

ចំនួនពិតមួយនៅចន្លោះ $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

1/គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x - 2\sin x}{x^3} & \text{បើ } x \neq 0 \\ -1 & \text{បើ } x = 0 \end{cases}$$

ចូរសិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ចំណុច $x=0$ ។

2/គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} & \text{បើ } x \neq 0 \\ 1 & \text{បើ } x = 0 \end{cases}$$

តើអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ចំណុច $x=0$ ដែរឬទេ ?

3/គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + 2\sin^2 x)}{x^2} & \text{បើ } x \neq 0 \\ 2 & \text{បើ } x = 0 \end{cases}$$

ចូរស្រាយថាអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ចំណុច $x=0$ ។

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

4/ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos ax}{x^2} & \text{បើ } x \neq 0 \\ 8 & \text{បើ } x = 0 \end{cases}$$

ចូរកំណត់ចំនួនពិត a ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ចំណុច $x = 0$ ។

5/ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 2 & \text{បើ } x \leq 1 \\ (x + a)^2 & \text{បើ } x > 1 \end{cases}$$

ចូរកំណត់ចំនួនពិត a ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ចំណុច $x = 1$ ។

6/ រកតម្លៃ A ដែលនាំឲ្យអនុគមន៍ f ជាប់គ្រប់តម្លៃ x ក្នុងករណីនីមួយៗ

$$\text{ក/ } f(x) = \begin{cases} Ax - 3 & \text{បើ } x < 2 \\ 3 - x + 2x^2 & \text{បើ } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{ខ/ } f(x) = \begin{cases} 1 - 3x & \text{បើ } x < 4 \\ Ax^2 + 2x - 3 & \text{បើ } x \geq 4 \end{cases}$$

$$\text{គ/ } f(x) = \begin{cases} x^2 + Ax + 2 & \text{បើ } x \leq 1 \\ \frac{\sin \pi x}{\pi - \pi x} & \text{បើ } x > 1 \end{cases}$$

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

7/ចូររកអនុគមន៍បន្លាយនៃ f តាមភាពជាប់ត្រង់ចំណុច $x = a$ ក្នុងករណី

នីមួយៗដូចខាងក្រោម ៖

ក/ $f(x) = \frac{1 - \cos x \cos 2x}{x^2}$ ត្រង់ចំណុច $x = 0$ ។

ខ/ $f(x) = \frac{e^{x^2 - 3x + 2} - 1}{x - 2}$ ត្រង់ចំណុច $x = 2$ ។

គ/ $f(x) = \frac{\ln(x^2 - 6x + 10)}{(x - 3)^2}$ ត្រង់ចំណុច $x = 3$ ។

ឃ/ $f(x) = \frac{\sin \pi x}{1 - x^3}$ ត្រង់ចំណុច $x = 1$ ។

ង/ $f(x) = \frac{1 + \cos x}{(\pi - x)^2}$ ត្រង់ចំណុច $x = \pi$ ។

8/គេមានអនុគមន៍ $y = f(x)$ កំណត់លើចន្លោះ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ដោយដឹងថា ៖

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin x} & \text{បើ } x \neq 0 \\ \sqrt{2} & \text{បើ } x = 0 \end{cases}$$

តើអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ចំណុច $x = 0$ ឬទេ ?

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

9/ គេឲ្យសមីការដឺក្រេទីពីរ $ax^2 + bx + c = 0$ ដែល $a \neq 0$ ។

គេដឹងថាលេខមេគុណ a, b, c ផ្ទៀងផ្ទាត់ $2a + 3b + 6c = 0$ ។

ចូរបង្ហាញថាសមីការនេះមានឫសយ៉ាងតិចមួយនៅក្នុង $\left[0, \frac{2}{3}\right]$ ។

10/ ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $(x^n - 1)\cos x + \sqrt{2}\sin x - 1 = 0$

យ៉ាងហោចណាស់មានឫសពិតមួយនៅចន្លោះ $[0, 1]$ ។

11/ រកតម្លៃ A និង B ដែលធ្វើឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$$f(x) = \begin{cases} Ax^2 + 5x - 9 & \text{បើ } x < 1 \\ B & \text{បើ } x = 1 \\ (3 - x)(A - 2x) & \text{បើ } x > 1 \end{cases}$$

ជាអនុគមន៍ជាប់លើ \mathbf{IR} ។

12/ គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \frac{\cos \pi x}{1 - 2x}$ ដែល $x \neq \frac{1}{2}$

ក-ចូរគណនាលីមីត $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$ ។

ខ-តើ f អាចមានអនុគមន៍បន្ទាយតាមភាពជាប់ ត្រង់ $x = \frac{1}{2}$ ឬទេ ?

ជំពូកទី៣

លំហាត់មានជំនោះស្រាយ

លំហាត់ទី១

គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \frac{a + b \cos x}{x^2}$ ដែល $x \neq 0$

ចូរកំណត់ a និង b ដើម្បីឱ្យ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4$ ។

ជំនោះស្រាយ

កំណត់ a និង b ៖

គេមាន $f(x) = \frac{a + b \cos x}{x^2}$ ដោយ $\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$

នោះ $f(x) = \frac{a + b(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2})}{x^2} = \frac{(a + b) - 2b \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$

គេបាន $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a + b) - 2b \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

ដើម្បីឲ្យបាន $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4$ គេគ្រាន់តែឲ្យ $a + b = 0$

$$\text{នឹង } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2b \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 4 \quad \text{ឬ} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \times \left(-\frac{b}{2}\right) = 8$$

នាំឲ្យ $-\frac{b}{2} = 4$ ឬ $b = -8$ ហើយ $a + b = 0$ នោះ $a = 8$ ។

ដូចនេះ $a = 8$, $b = -8$ ។

លំហាត់ទី២

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{n}{1-x^n} \right)$

គ. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right)$ ដែល m និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ដំណោះស្រាយ

ក. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{(1+x+x^2)-3}{(1-x)(1+x+x^2)} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) + (x^2-1)}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) + (x-1)(x+1)}{-(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+(x+1)}{-(x^2+x+1)} = \frac{1+2}{-3} = -1$$

ដូចនេះ: $\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) = -1}$ ។

$$\begin{aligned}
 ខ. \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{n}{1-x^n} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{n}{(1-x)(1+x+\dots+x^{n-1})} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1+x+\dots+x^{n-1}) - n}{(1-x)(1+x+\dots+x^{n-1})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) + \dots + (x^{n-1}-1)}{-(x-1)(1+x+\dots+x^{n-1})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) + \dots + (x-1)(x^{n-2} + \dots + x + 1)}{-(x-1)(1+x+\dots+x^{n-1})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \dots + (x^{n-2} + \dots + x + 1)}{-(1+x+\dots+x^{n-1})} \\
 &= \frac{1+2+\dots+(n-1)}{-n} = -\frac{n-1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 គ. \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{n}{1-x^n} \right) - \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{m}{1-x^m} \right) \\
 &= \left(-\frac{n-1}{2} \right) - \left(-\frac{m-1}{2} \right) = \frac{-n+1+m-1}{2} = \frac{m-n}{2}
 \end{aligned}$$

ដូច្នេះ: $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) = \frac{m-n}{2}$ ។

លំហាត់ទី៣

គណនាលីមីត ៖

ក. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (3x+1)}{x^2}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - (nx+1)}{x^2}, n \in \mathbb{IN}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (3x+1)}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 3x + 3x^2 + x^3 - 3x - 1}{x^2}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + x^3}{x^2}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} (3 + x) = 3$$

ដូចនេះ: $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (3x+1)}{x^2} = 3}$ ។

$$ខ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - (nx+1)}{x^2}, n \in \mathbb{IN}$$

តាមរូបមន្តទ្រេពាញូតុន ៖

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \dots + C_n^n x^n$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + C_n^3 x^3 + \dots + C_n^n x^n - nx - 1}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{n(n-1)}{2} x^2 + C_n^3 x^3 + \dots + C_n^n x^n}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{n(n-1)}{2} + C_n^3 x + \dots + C_n^n x^{n-2} \right] = \frac{n(n-1)}{2}$$

ដូច្នេះនេះ៖ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - (nx+1)}{x^2} = \frac{n(n-1)}{2}$ ។

លំហាត់ទី៤

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - 4x^3 + 1}{(x-1)^2}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}, n \in \mathbb{IN}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - 4x^3 + 1}{(x-1)^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x^4 - 3x^3) - (x^3 - 1)}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3(x-1) - (x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - x^2 - x - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - x^2) + (x^3 - x) + (x^3 - 1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x-1) + x(x-1)(x+1) + (x-1)(x^2 + x + 1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[x^2 + x(x+1) + (x^2 + x + 1) \right] = 1 + 2 + 3 = 6$$

ដូច្នេះ៖ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - 4x^3 + 1}{(x-1)^2} = 6$ ។

$$ខ. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}, n \in \mathbb{N}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{nx^n(x-1) - (x-1)(x^{n-1} + \dots + x^2 + x + 1)}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^n - x^{n-1}) + \dots + (x^n - x) + (x^n - 1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n-1}(x-1) + \dots + x(x-1)(x^{n-2} + \dots + x + 1) + (x-1)(x^{n-1} + \dots + x + 1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[x^{n-1} + \dots + x(x^{n-2} + \dots + x + 1) + \dots + (x^{n-1} + \dots + x + 1) \right]$$

$$= 1 + 2 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2} = \frac{n(n+1)}{2} \quad \heartsuit$$

លំហាត់ទី៥

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

$$A = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\sqrt[6]{\frac{6x^4 - 12x^3 - x + 2}{x + 2}} \times \frac{\sqrt[3]{x^3 - \sqrt{x^2 + 60}}}{\sqrt{x^2 - \sqrt[3]{x^2 + 60}}} \right)$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$$A = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\sqrt[6]{\frac{6x^4 - 12x^3 - x + 2}{x + 2}} \times \frac{\sqrt[3]{x^3 - \sqrt{x^2 + 60}}}{\sqrt{x^2 - \sqrt[3]{x^2 + 60}}} \right)$$

$$U = 6x^4 - 12x^3 - x + 2$$

$$= 6x^3(x - 2) - (x - 2) = (x - 2)(6x^3 - 1)$$

$$V = x^3 - \sqrt{x^2 + 60} = \frac{x^6 - x^2 - 60}{x^3 + \sqrt{x^2 + 60}}$$

$$= \frac{W}{x^3 + \sqrt{x^2 + 60}}$$

ដែល $W = x^6 - x^2 - 60 = (x^6 - 64) - (x^2 - 4)$

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

$$= (x^2 - 4)(x^4 + 4x^2 + 16) - (x^2 - 4)$$

$$= (x - 2)(x + 2)(x^4 + 4x^2 + 15)$$

$$T = x^2 - \sqrt[3]{x^2 + 60} = \frac{x^6 - x^2 - 60}{x^4 + x^2\sqrt[3]{x^2 + 60} + \sqrt[3]{(x^2 + 60)^2}}$$

$$= \frac{W}{x^4 + x^2\sqrt[3]{x^2 + 60} + \sqrt[3]{(x^2 + 60)^2}} \quad \text{។}$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\sqrt[6]{\frac{U}{x+2}} \times \frac{\sqrt[3]{V}}{\sqrt{T}} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\sqrt[6]{\frac{U}{x+2} \cdot \frac{V^2}{T^3}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\sqrt[6]{\frac{(x-2)(6x^3-1)}{x+2} \cdot \frac{W^2}{(x^3 + \sqrt{x^2+60})^2} \cdot \frac{(x^4 + x^2\sqrt[3]{x^2+60} + \sqrt[3]{(x^2+60)^2})^3}{W^3}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\sqrt[6]{\frac{(x-2)(6x^3-1)(x^4 + x^2\sqrt[3]{x^2+60} + \sqrt[3]{(x^2+60)^2})^3}{(x+2)(x^3 + \sqrt{x^2+60})^2(x-2)(x+2)(x^4 + 4x^2 + 15)}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\sqrt[6]{\frac{(6x^3-1)(x^4 + x^2\sqrt[3]{x^2+60} + \sqrt[3]{(x^2+60)^2})^3}{(x+2)^2(x^3 + \sqrt{x^2+60})^2(x^4 + 4x^2 + 15)}} \right) = \sqrt[6]{\frac{47.48^3}{16.16^2 \cdot 47}} = \sqrt{3}$$

ដូច្នេះ: $A = \sqrt{3}$ ។

លំហាត់ទី៦

គណនាលីមីត $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \sqrt{x^3 + 1} - \sqrt{x^4 + 1}}{x - 1 + \sqrt{x + 1} - \sqrt{x^2 + 1}}$

ដំណោះស្រាយ

$$\begin{aligned}
 A &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \sqrt{x^3 + 1} - \sqrt{x^4 + 1}}{x - 1 + \sqrt{x + 1} - \sqrt{x^2 + 1}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1) + \frac{x^3 + 1 - x^4 - 1}{\sqrt{x^3 + 1} + \sqrt{x^4 + 1}}}{(x-1) + \frac{x+1 - x^2 - 1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2 + 1}}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1) - \frac{x^3(x-1)}{\sqrt{x^3 + 1} + \sqrt{x^4 + 1}}}{(x-1) - \frac{x(x-1)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2 + 1}}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \left[x+1 - \frac{x^3}{\sqrt{x^3 + 1} + \sqrt{x^4 + 1}} \right]}{(x-1) \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2 + 1}} \right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1 - \frac{x^3}{\sqrt{x^3 + 1} + \sqrt{x^4 + 1}}}{1 - \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2 + 1}}} = \frac{2 - \frac{1}{2\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{7 + 3\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

លំហាត់ទី៧

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោមនេះ៖

ក. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 2x}{x \sin x}$

ច. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

ឆ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \sqrt{\cos 2x}}$

គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{3 \sin x - \sin 3x}$

ជ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{x \cdot \tan x}$

ឃ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{1 - \cos 2x \cos 4x}$

ឈ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin^2} - \cos x}{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos 3x}}$

ង. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4}$

ញ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{\cos 3x}}{x(1 - \cos \sqrt{x})}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត៖

ក. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 2x}{x \sin x}$

តាមរូបមន្ត $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x + \cos^2 2x)}{x \sin x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x (1 + \cos 2x + \cos^2 2x)}{x \sin x} \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos 2x + \cos^2 2x) = 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6
 \end{aligned}$$

ដូច្នេះ: $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 2x}{x \sin x} = 6}$ ។

ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

ដោយ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \sin x = \cos x \cdot \tan x$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \cos x \cdot \tan x}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

ដូច្នេះ: $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}}$ ។

$$\begin{aligned}
 \text{គ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{3\sin x - \sin 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x - 2\sin x \cos x}{3\sin x - (3\sin x - 4\sin^3 x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x(1 - \cos x)}{4\sin^3 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sin x \sin^2 \frac{x}{2}}{4\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x} \right] = 1^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1^2 = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

ដូច្នេះ: $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{3\sin x - \sin 3x} = \frac{1}{4}}$ ។

$$\begin{aligned}
 \text{ឃ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{1 - \cos 2x \cos 4x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 4x) - (1 - \cos 2x)}{(1 - \cos 2x) + \cos 2x(1 - \cos 4x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 2x - 2\sin^2 x}{2\sin^2 x + 2\cos 2x \sin^2 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x - \sin^2 x}{\sin^2 x + \cos 2x \sin^2 2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^2 2x}{x^2} - \frac{\sin^2 x}{x^2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2} + \cos 2x \cdot \frac{\sin^2 2x}{x^2}} = \frac{4 - 1}{1 + 4} = \frac{3}{5}
 \end{aligned}$$

$$\text{ង. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos\left(2 \sin^2 \frac{x}{2}\right)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2\left(\sin^2 \frac{x}{2}\right)}{x^4}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2\left(\sin^2 \frac{x}{2}\right)}{\left(\sin^2 \frac{x}{2}\right)^2} \cdot \frac{\sin^4 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^4} \cdot \frac{1}{16} = 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$$

ដូច្នេះ: $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} = \frac{1}{8}} \quad \text{។}$

$$\text{ច. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) + \cos x(1 - \sqrt{\cos 2x})}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x(1 - \cos 2x)}{x^2(1 + \sqrt{\cos 2x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x \sin^2 x}{x^2(1 + \sqrt{\cos 2x})}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{4} + 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{\cos x}{1 + \sqrt{\cos 2x}} = 2$$

$$\begin{aligned}
 \text{ឆ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \sqrt{\cos 2x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos 2x} \cdot \frac{1 + \sqrt{\cos 2x}}{1 + \sqrt{\cos x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin^2 x} \cdot \frac{1 + \sqrt{\cos 2x}}{1 + \sqrt{\cos x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1 + \sqrt{\cos 2x}}{1 + \sqrt{\cos x}} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

ដូច្នេះ: $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \sqrt{\cos 2x}} = \frac{1}{4}}$ ។

$$\begin{aligned}
 \text{ជ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{x \cdot \tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 1 - \cos x}{x \tan x (\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \tan x (\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x \tan x (\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})} \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \frac{x}{\tan x} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x}} = \frac{\sqrt{2}}{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ឈ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin^2 x} - \cos x}{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos 3x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin^2 x - \cos^2 x}{\cos x - \cos 3x} \cdot \frac{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos 3x}}{\sqrt{1 + \sin^2 x} + \cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + (1 - \cos^2 x)}{2 \sin \frac{x+3x}{2} \sin \frac{x-3x}{2}} \cdot \frac{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos 3x}}{\sqrt{1 + \sin^2 x} + \cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin 2x \cdot \sin(-x)} \cdot \frac{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos 3x}}{\sqrt{1 + \sin^2 x} + \cos x} \\
 &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos 3x}}{\sqrt{1 + \sin^2 x} + \cos x} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin^2 x} - \cos x}{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos 3x}} = -\frac{1}{2} \quad \text{។}$$

លំហាត់ទី៨

គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sin \frac{\pi x}{2}}{(1 - x)^2}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan \frac{\pi}{x}}{1 - x^2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi^2 - 4x^2}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sin \frac{2\pi}{x+3}}{(1-x)^2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{1 - \sqrt{2} \sin x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \sin x}}{\cos^2 x}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\pi - 3x}{\sqrt{3} - 2 \sin x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1 + \tan \pi x}{1 - x^2}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\cos \frac{\pi}{x}}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 2} (4 - x^2) \tan \frac{\pi x}{4}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x - 2) \tan \frac{\pi}{x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \tan \frac{x}{2}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^3}{\cos \frac{\pi}{x+1}}$$

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

$$15. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)^2}{1 - \sin \frac{\pi}{x}}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{\sin \frac{2\pi}{x}}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos \frac{\pi x}{x+\pi}}{\pi-x}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x^2) \tan \frac{\pi x}{x+1}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\cos \frac{\pi x}{x+3}}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 2} (2x-x^2) \cot \frac{2\pi}{x}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sin \frac{\pi x}{2}}{(1-x)^2}$$

តាង $x = 1 - z$ កាលណា $x \rightarrow 1$ នោះ $z \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi z}{2}\right)}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \frac{\pi z}{2}}{z^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{\pi z}{4}}{z^2} = 2 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{\pi z}{4}}{\left(\frac{\pi z}{4}\right)^2} \cdot \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi^2 - 4x^2}$$

តាង $z = \frac{\pi}{2} - x$ នាំឱ្យ $x = \frac{\pi}{2} - z$ កាលណា $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ នោះ $z \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)}{\pi^2 - 4\left(\frac{\pi}{2} - z\right)^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{\pi^2 - \pi^2 + 4\pi z - 4z^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{4\pi z - 4z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} \cdot \frac{1}{4\pi - 4z} = \frac{1}{4\pi} \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\boxed{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi^2 - 4x^2} = \frac{1}{4\pi}}$ ។

$$3. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x} \quad \text{តាង } x = \frac{\pi}{4} - z \text{ កាលណា } x \rightarrow \frac{\pi}{4} \text{ នោះ } z \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - z\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - z\right)}{\pi - 4\left(\frac{\pi}{4} - z\right)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos z - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin z\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos z + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin z\right)}{4z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-\sqrt{2} \sin z}{4z} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \sin x}}{\cos^2 x}$$

តាង $x = \frac{\pi}{2} - z$ កាលណា $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ នៅ: $z \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \sin(\frac{\pi}{2} - z)}}{\cos^2(\frac{\pi}{2} - z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos z}}{\sin^2 z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2 - 1 - \cos z}{\sin^2 z \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos z})} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{\sin^2 z (\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos z})} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{z}{2}}{\sin^2 z \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos z})} \\ &= 2 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{z}{2}}{(\frac{z}{2})^2} \cdot \frac{z^2}{\sin^2 z} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos z}} = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

ដូច្នេះ: $\boxed{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \sin x}}{\cos^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{8}} \quad \eta$

5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1 + \tan \pi x}{1 - x^2}$

តាង $x = 1 - z$ កាលណា $x \rightarrow 1$ នោះ $z \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(1 - z)^3 - 1 + \tan(\pi - \pi z)}{1 - (1 - z)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - 3z + 3z^2 - z^3 - 1 - \tan \pi z}{1 - 1 + 2z - z^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-3z + 3z^2 - z^3 - \tan \pi z}{2z - z^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z(-3 + 3z - z^2 - \frac{\tan \pi z}{z})}{z(2 - z)} = \frac{-3 - \pi}{2} \end{aligned}$$

ដូច្នេះ: $\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1 + \tan \pi x}{1 - x^2} = -\frac{3 + \pi}{2}}$

6. $\lim_{x \rightarrow 2} (4 - x^2) \tan \frac{\pi x}{4}$

តាង $z = 2 - x$ នាំឱ្យ $x = 2 - z$ កាលណា $x \rightarrow 2$ នោះ $z \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} &= \lim_{z \rightarrow 0} \left[4 - (2 - z)^2 \right] \tan \frac{\pi}{4} (2 - z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} (4z - z^2) \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi z}{4} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} (4 - z) \frac{\frac{\pi z}{4}}{\tan \frac{\pi z}{4}} \cdot \frac{4}{\pi} = \frac{16}{\pi} \end{aligned}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \tan \frac{x}{2}$$

តាង $z = \pi - x$ នាំឱ្យ $x = \pi - z$ កាលណា, $x \rightarrow \pi$ នោះ $z \rightarrow 0$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} z \tan \frac{\pi - z}{2} = \lim_{z \rightarrow 0} z \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{z}{2} \right)$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} z \cot z = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\tan z} = 1$$

ដូច្នេះ: $\lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \tan \frac{x}{2} = 1$ ។

$$8. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{1 - \sqrt{2} \sin x}$$

តាង $z = \frac{\pi}{4} - x$ នាំឱ្យ $x = \frac{\pi}{4} - z$ កាលណា, $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ នោះ $z \rightarrow 0$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \tan \left(\frac{\pi}{4} - z \right)}{1 - \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - z \right)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1 - \tan z}{1 + \tan z}}{1 - \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos z - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin z \right)}$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2 \tan z}{(1 - \cos z + \sin z)(1 + \tan z)}$$

$$= 2 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan z}{z}}{\left(\frac{1 - \cos z}{z} + \frac{\sin z}{z} \right) (1 + \tan z)} = 2 \cdot \frac{1}{(0 + 1)(1 + 0)} = 2$$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\pi - 3x}{\sqrt{3} - 2\sin x}$ តាង $z = \frac{\pi}{3} - x$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\pi - 3\left(\frac{\pi}{3} - z\right)}{\sqrt{3} - 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - z\right)} \\
 &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{3z}{\sqrt{3} - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos z - \frac{1}{2}\sin z\right)} \\
 &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{3z}{\sqrt{3} - \sqrt{3}\cos z - \sin z} \\
 &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{3}{\sqrt{3}\frac{1 - \cos z}{z} - \frac{\sin z}{z}} = \frac{3}{0 - 1} = -3
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\pi - 3x}{\sqrt{3} - 2\sin x} = -3$ ។

10. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x - 2) \tan \frac{\pi}{x}$

តាង $z = \frac{1}{x}$ នាំឱ្យ $x = \frac{1}{z}$ កាលណា, $x \rightarrow 2$ នោះ $z \rightarrow \frac{1}{2}$

$$= \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - 2\right) \tan \pi z$$

តាង $u = \frac{1}{2} - z$ នាំឱ្យ $z = \frac{1}{2} - u$ កាលណា, $z \rightarrow \frac{1}{2}$ នោះ $u \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{u \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{2} - u\right)^2} - \frac{1}{\frac{1}{2} - u} - 2 \right] \tan \pi \left(\frac{1}{2} - u \right) \\
 &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2} + u - 2\left(\frac{1}{2} - u\right)^2}{\left(\frac{1}{2} - u\right)^2} \tan \left(\frac{\pi}{2} - \pi u \right) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{3u - 2u^2}{\left(\frac{1}{2} - u\right)^2} \cot(\pi u) \\
 &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{3 - 2u}{(0.5 - u)^2} \cdot \frac{\pi u}{\tan \pi u} \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{12}{\pi}
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\boxed{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x - 2) \tan \frac{\pi}{x} = \frac{12}{\pi}}$ ។

11. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^3}{\cos \frac{\pi}{x+1}}$

តាង $z = \frac{1}{x+1}$ នាំឱ្យ $x = \frac{1}{z} - 1$

កាលណា, $x \rightarrow 1$ នោះ $z \rightarrow \frac{1}{2}$

$$= \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1 - \left(\frac{1}{z} - 1\right)^3}{\cos \pi z}$$

តាង $u = \frac{1}{2} - z$ នាំឱ្យ $z = \frac{1}{2} - u$

កាលណា, $z \rightarrow \frac{1}{2}$ នោះ $u \rightarrow 0$

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \left(\frac{1}{\frac{1}{2} - u} - 1\right)^3}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi u\right)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{2} - u\right)^3 - \left(1 - \frac{1}{2} + u\right)^3}{\left(\frac{1}{2} - u\right)^3 \sin \pi u} \\
 &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{8} - \frac{3}{4}u + \frac{3}{2}u^2 - u^3 - \frac{1}{8} - \frac{3}{4}u - \frac{3}{2}u^2 - u^3}{\left(\frac{1}{2} - u\right)^3 \sin \pi u} \\
 &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{-\frac{3}{2}u - 2u^3}{\left(\frac{1}{2} - u\right)^3 \sin \pi u} \\
 &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{-\frac{3}{2} - 2u^2}{\left(\frac{1}{2} - u\right)^3} \cdot \frac{\pi u}{\sin \pi u} \cdot \frac{1}{\pi} = -\frac{12}{\pi}
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^3}{\cos \frac{\pi}{x+1}} = -\frac{12}{\pi}}$ ។

12. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)^2}{1 - \sin \frac{\pi}{x}}$

តាង $z = \frac{1}{x}$ នាំឱ្យ $x = \frac{1}{z}$

កាលណា, $x \rightarrow 2$ នោះ $z \rightarrow \frac{1}{2}$

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

$$= \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2 - \frac{1}{z})^2}{1 - \sin \pi z}$$

តាង $u = \frac{1}{2} - z$ នាំឱ្យ $z = \frac{1}{2} - u$

កាលណា, $z \rightarrow \frac{1}{2}$ នោះ $u \rightarrow 0$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(2 - \frac{1}{0.5 - u})^2}{1 - \sin(\frac{\pi}{2} - \pi u)}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(1 - 2u - 1)^2}{(0.5 - u)^2 (1 - \cos \pi u)}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{4u^2}{(0.5 - u)^2 2 \sin^2 \frac{\pi u}{2}}$$

$$= 2 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{(0.5 - u)^2} \cdot \frac{(\frac{\pi u}{2})^2}{\sin^2 \frac{\pi u}{2}} \cdot \frac{4}{\pi^2} = \frac{8}{\pi^2}$$

ដូច្នេះនេះ: $\boxed{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)^2}{1 - \sin \frac{\pi}{x}} = \frac{8}{\pi^2}}$ ។

$$13. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos \frac{\pi x}{x + \pi}}{\pi - x}$$

តាង $t = \frac{\pi x}{x + \pi} \Rightarrow x = \frac{\pi t}{\pi - t}$ បើ $x \rightarrow \pi \Rightarrow t \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$$= \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\pi - \frac{\pi t}{\pi - t}} = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\pi - t) \cos t}{\pi(\pi - 2t)}$$

តាង $u = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} - u$ បើ $t \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow u \rightarrow 0$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(\pi - \frac{\pi}{2} + u) \cos(\frac{\pi}{2} - u)}{\pi(\pi - \pi + 2u)}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{2} + u}{2\pi} \cdot \frac{\sin u}{u} = \frac{1}{4}$$

ដូច្នេះ: $\boxed{\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos \frac{\pi x}{x + \pi}}{\pi - x} = \frac{1}{4}}$ ។

$$14. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\cos \frac{\pi x}{x + 3}}$$

តាង $z = \frac{\pi x}{x + 3}$ នាំឱ្យ $x = \frac{3z}{\pi - z}$

កាលណា, $x \rightarrow 3$ នោះ $z \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$$= \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{3z}{\pi - z} - 3}{\cos z} = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3(2z - \pi)}{(\pi - z) \cos z}$$

តាង $u = \frac{\pi}{2} - z \Rightarrow z = \frac{\pi}{2} - u$

បើ $z \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow u \rightarrow 0$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{3(\pi - 2u - \pi)}{(\pi - \frac{\pi}{2} + u) \cos(\frac{\pi}{2} - u)}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{-6u}{(\frac{\pi}{2} + u) \sin u}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{-6}{\frac{\pi}{2} + u} \cdot \frac{u}{\sin u} = -\frac{12}{\pi}$$

ដូចនេះ: $\boxed{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\cos \frac{\pi x}{x + 3}} = -\frac{12}{\pi}}$ ។

15. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan \frac{\pi}{x}}{1 - x^2}$

តាង $z = \frac{1}{x}$ នាំឱ្យ $x = \frac{1}{z}$

កាលណា $x \rightarrow 1$ នោះ $z \rightarrow 1$

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\tan \pi z}{1 - \frac{1}{z^2}} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2 \tan \pi z}{z^2 - 1}$$

តាង $u = 1 - z$ នាំឱ្យ $z = 1 - u$

កាលណា $z \rightarrow 1$ នោះ $u \rightarrow 0$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(1 - u)^2 \tan(\pi - \pi u)}{(1 - u)^2 - 1}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(1 - u)^2 (-\tan \pi u)}{2u - u^2}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{-(1 - u)^2 \tan \pi u}{2 - u} \cdot \frac{\tan \pi u}{\pi u} \cdot \pi = -\frac{\pi}{2}$$

ដូចនេះ

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan \frac{\pi}{x}}{1 - x^2} = -\frac{\pi}{2}$$

 ។

16. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sin \frac{2\pi}{x+3}}{(1-x)^2}$

តាង $z = \frac{1}{x+3}$ នាំឱ្យ $x = \frac{1}{z} - 3$ បើ $x \rightarrow 1$ នោះ $z \rightarrow \frac{1}{4}$

$$= \lim_{z \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{1 - \sin 2\pi z}{\left(1 - \frac{1}{z} + 3\right)^2} = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{z^2 (1 - \sin 2\pi z)}{(4z - 1)^2}$$

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

តាង $u = \frac{1}{4} - z$ នាំឱ្យ $z = \frac{1}{4} - u$

កាលណា, $z \rightarrow \frac{1}{4}$ នោះ $u \rightarrow 0$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(0.25 - u)^2 [1 - \sin(\frac{\pi}{2} - \pi u)]}{(1 - 4u - 1)^2}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(0.25 - u)^2 (1 - \cos \pi u)}{16u^2}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(0.25 - u)^2 \cdot 2 \sin^2 \frac{\pi u}{2}}{16u^2}$$

$$= \frac{1}{8} \lim_{u \rightarrow 0} (0.25 - u)^2 \cdot \frac{\sin^2 \frac{\pi u}{2}}{(\frac{\pi u}{2})^2} \cdot \frac{\pi^2}{4} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{512}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sin \frac{2\pi}{x+3}}{(1-x)^2} = \frac{\pi^2}{512}$ ។

17. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{\sin \frac{2\pi}{x}}$

តាង $z = \frac{2}{x}$ នាំឱ្យ $x = \frac{2}{z}$ កាលណា, $x \rightarrow 2$ នោះ $z \rightarrow 1$

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{2 - \frac{2}{z}}{\sin \pi z} = 2 \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z - 1}{z \cdot \sin \pi z}$$

តាង $u = 1 - z$ នាំឱ្យ $z = 1 - u$

កាលណា, $z \rightarrow 1$ នោះ $u \rightarrow 0$

$$= 2 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{-u}{(1 - u) \sin(\pi - \pi u)}$$

$$= -2 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{1 - u} \cdot \frac{\pi u}{\sin \pi u} \cdot \frac{1}{\pi} = -\frac{2}{\pi}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{\sin \frac{2\pi}{x}} = -\frac{2}{\pi}$ ។

18. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x^2) \tan \frac{\pi x}{x + 1} = \frac{8}{\pi}$

19. $\lim_{x \rightarrow 2} (2x - x^2) \cot \frac{2\pi}{x} = \frac{4}{\pi}$

លំហាត់ទី៩

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin 2x}$

ច. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - \cos 2x}{x^2}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}, a, b \in \mathbb{R}^*$

ឆ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2\sin x} - e^{\tan 3x}}{x^3 + x}$

គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x + 3e^{2x} - 5}{e^{3x} - 1}$

ជ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{-2x^2} + \sin x - \tan x - x}{x^3}$

ឃ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx} - n}{x}$

ឈ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3\sin^2 x} - \cos x \cos 3x}{-e^{2x^2} + \cos 2x}$

ង. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(e^{2x} - 1) \dots (e^{nx} - 1)}{x^n}$

ញ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^{x^2} + 3} - 2 \cos 4x}{x \sin x}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin 2x}$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x \sin 2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{1}{e^x} = 1
 \end{aligned}$$

ដូច្នេះ: $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin 2x} = 1}$ ។

ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}, a, b \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{ax} - 1) - (e^{bx} - 1)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{ax} \cdot a - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{bx} - 1}{bx} \cdot b = a - b
 \end{aligned}$$

ដូច្នេះ: $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} = a - b}$

គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x + 3e^{2x} - 5}{e^{3x} - 1}$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^x - 1) + 3(e^{2x} - 1)}{(e^{3x} - 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{e^x - 1}{x} + 6 \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2x}}{3 \cdot \frac{e^{3x} - 1}{3x}} = \frac{2 + 6}{3} = \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

$$\begin{aligned}
 \text{ឃ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx} - n}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) + (e^{2x} - 1) + \dots + (e^{nx} - 1)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^x - 1}{x} + 2 \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2x} + \dots + n \cdot \frac{e^{nx} - 1}{nx} \right] \\
 &= 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ង. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(e^{2x} - 1) \dots (e^{nx} - 1)}{x^n} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot 2 \frac{e^{2x} - 1}{2x} \dots n \frac{e^{nx} - 1}{nx} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = n!
 \end{aligned}$$

ដូច្នេះ:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(e^{2x} - 1) \dots (e^{nx} - 1)}{x^n} = n!$$
 ។

$$\begin{aligned}
 \text{ច. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - \cos 2x}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - (1 - 2\sin^2 x)}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + 2\sin^2 x}{x^2} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - 1}{-x^2} + 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = -1 + 2 = 1
 \end{aligned}$$

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

$$\begin{aligned}
 \text{ឆ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2\sin x} - e^{\tan 3x}}{x^3 + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{-2\sin x} - 1) - (e^{\tan 3x} - 1)}{x(x^2 + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2\sin x} - 1}{-2\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{-2}{x^2 + 1} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan 3x} - 1}{\tan 3x} \cdot \frac{\tan 3x}{3x} \cdot \frac{3}{x^2 + 1} = -5
 \end{aligned}$$

ដូច្នេះ: $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2\sin x} - e^{\tan 3x}}{x^3 + x} = -5}$ ។

$$\begin{aligned}
 \text{ជ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{-2x^2} + \sin x - \tan x - x}{x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^{-2x^2} - 1) + \cos x \tan x - \tan x}{x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x^2} - 1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(\cos x - 1)}{x^3} \\
 &= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x^2} - 1}{-2x^2} - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} = -\frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

ដូច្នេះ: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{-2x^2} + \sin x - \tan x - x}{x^3} = -\frac{5}{2}$ ។

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

$$\begin{aligned}
 & \text{ឈ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3\sin^2 x} - \cos x \cos 3x}{-e^{2x^2} + \cos 2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3\sin^2 x} - (1 - 2\sin^2 \frac{x}{2})(1 - 2\sin^2 \frac{3x}{2})}{-e^{2x^2} + 1 - 2\sin^2 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3\sin^2 x} - 1 + 2\sin^2 \frac{3x}{2} + 2\sin^2 \frac{x}{2} - 4\sin^2 \frac{x}{2} \sin^2 \frac{3x}{2}}{-(e^{2x^2} - 1 + 2\sin^2 x)} \\
 &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \frac{e^{3\sin^2 x} - 1}{3\sin^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} + 2 \cdot \frac{\sin^2 \frac{3x}{2}}{x^2} + 2 \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} - 4 \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \cdot \sin^2 \frac{3x}{2}}{2 \cdot \frac{e^{2x^2} - 1}{2x^2} + 2 \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2}} \\
 &= - \frac{3 + 2 \cdot \frac{9}{4} - 2 \cdot \frac{1}{4} - 0}{2 + 2} = \frac{3 + 4}{4} = \frac{7}{4}
 \end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3\sin^2 x} - \cos x \cos 3x}{-e^{2x^2} + \cos 2x} = \frac{7}{4} \quad \sphericalcap$$

លំហាត់ទី១០

$$\text{គេឱ្យអនុគមន៍ } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x + \cos x - \sqrt{2}}{\left(\frac{\pi}{4} - x\right)^2} & \text{បើ } x \neq \frac{\pi}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \text{បើ } x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

ចូរសិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ចំណុច $x_0 = \frac{\pi}{4}$?

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ចំណុច $x_0 = \frac{\pi}{4}$

$$\text{គេមាន } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x - \sqrt{2}}{\left(\frac{\pi}{4} - x\right)^2}$$

តាង $t = \frac{\pi}{4} - x$ នាំឱ្យ $x = \frac{\pi}{4} - t$ ។ កាលណា $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ នោះ $t \rightarrow 0$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right) - \sqrt{2}}{t^2}$$

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{4} \cos t - \sin t \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \cos t + \sin \frac{\pi}{4} \sin t - \sqrt{2}}{t^2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos t - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t - \sqrt{2}}{t^2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \cos t - \sqrt{2}}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}(\cos t - 1)}{t^2} = \frac{-2\sqrt{2} \sin^2 \frac{t}{2}}{t^2}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{t}{2}}{\left(\frac{t}{2}\right)^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

ដោយ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

នាំឱ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x_0 = \frac{\pi}{4}$ ។

លំហាត់ទី១១

គេឱ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{1 - x^3}$ កំនត់គ្រប់ $x \neq 1$ ។

តើគេអាចបន្លាយអនុគមន៍ f ឱ្យជាប់ត្រង់ចំនុច $x_0 = 1$ បានឬទេ ?

បើអាច ចូរកំនត់អនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $f(x)$

ត្រង់ចំនុច $x_0 = 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់អនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់

$$\text{គេមាន } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{1 - x^3}$$

តាង $t = 1 - x$ នាំឱ្យ $x = 1 - t$ ។ កាលណា $x \rightarrow 1$ នោះ $t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi - \pi t)}{1 - (1 - t)^3} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi t)}{1 - 1 + 3t - 3t^2 + t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi t)}{t(3 - 3t + t^2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \cdot \frac{\pi}{3 - 3t + t^2} = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

ដោយ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{\pi}{3}$ កំនត់ នោះគេអាចបន្លាយអនុគមន៍ $f(x)$

ឱ្យជាប់ត្រង់ចំនុច $x_0 = 1$ ។

បើយើងតាង $g(x)$ ជាអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $f(x)$

ត្រង់ចំនុច $x_0 = 1$ នោះគេអាចសរសេរ៖

$$\text{ដូចនេះ: } g(x) = \begin{cases} f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{1 - x^3} & \text{បើ } x \neq 1 \\ \frac{\pi}{3} & \text{បើ } x = 1 \end{cases}$$

ជំពូកទី៤

លំហាត់អនុវត្ត

១-ដោយប្រើនិយមន័យចូរស្រាយបញ្ជាក់លីមីតខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1) = 7$

ខ/ $\lim_{x \rightarrow -1} (2x + 5) = 3$

គ/ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x + 3}{x} = 3$

ឃ/ $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 2) = 4$

ង/ $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8$

ច/ $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2x + 5} = 3$

ឆ/ $\lim_{x \rightarrow 2} 3^x = 9$

ជ/ $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + x + 3) = 5$

ឈ/ $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 + 5} = 3$

ញ/ $\lim_{x \rightarrow 8} \sqrt[3]{x} = 2$

២-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 3x + 2}$

ខ/ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 5x + 6}$

គ/ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{2x^3 - 3x + 1}$

ឃ/ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 4x + 3}{(x - 1)^2}$

ង/ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + 2x - 4}{x^2 - 6x + 8}$

ច/ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{4\sin^2 x - 1}$

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

៣-កំណត់តម្លៃនៃចំនួនថេរ a ដើម្បីឲ្យលីមីតខាងក្រោមជាលីមីតនៃចំនួន

ថេរ ហើយកំណត់លីមីតនេះផង ៖

ក/ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + 4}{x - 2}$

ខ/ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - a}{x - 1}$

គ/ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} + a}{x}$

ឃ/ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+a} - 1}{x - 2}$

ង/ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + ax} - 1}{x^2 - 1}$

ច/ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + ax + 2}{x^2 - 4}$

៤-កំណត់តម្លៃនៃចំនួនថេរ a និង b ដើម្បីឲ្យលីមីតខាងក្រោមជាលីមីតនៃ

ចំនួនថេរ ហើយកំណត់លីមីតនេះផង ៖

ក/ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + ax + b}{(x - 1)^2}$

ខ/ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 + ax^3 + bx + 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$

គ/ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 + 6x^2 + ax + b}{x^3 - 3x^2 + 4}$

ឃ/ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + 1)^3 + ax + b}{x^2}$

ង/ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 + ax + b}{x^3 - 3x + 2}$

ច/ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax^2 + bx + 4}{x^4 - 8x^2 + 16}$

ឆ/ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 + ax + b}{(x - a)^2}$

ជ/ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + b - (1 + 2x)^3}{x^2}$

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

៥-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

$$\text{ក/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 3x}{\sin^2 5x}$$

$$\text{ខ/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{\tan^3 x - \sin^3 x}$$

$$\text{គ/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}$$

$$\text{ឃ/ } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}$$

$$\text{ង/ } \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$$

$$\text{ច/ } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)$$

៦-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

$$\text{ក/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - \cos 2x}{\sin^2 x}$$

$$\text{ខ/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}$$

$$\text{គ/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1 + x \sin x} - \cos x}$$

$$\text{ឃ/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

$$\text{ង/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$$

$$\text{ច/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$$

$$\text{ឆ/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x}{x^2}$$

$$\text{ជ/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4}$$

$$\text{ឈ/ } \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x^2) \tan \frac{\pi x}{2}$$

$$\text{ញ/ } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan \pi x}{1 - x}$$

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

៧-កំណត់អនុគមន៍ដឺក្រេទីពីរ $y = f(x)$ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌទាំងពីរ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = 1 \quad (\text{i}) \quad \text{និង} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} \quad (\text{ii})$$

៨-គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \frac{2 - 2\cos ax}{x^2}$ ដែល $a \in \mathbb{R}$

$$\text{កំណត់តម្លៃនៃ } a \text{ ដើម្បីឲ្យ } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 100 \quad \text{។}$$

៩-គេឲ្យអនុគមន៍ f ផ្ទៀងផ្ទាត់ $4 - x^2 \leq f(x) \leq 4 + x^2$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

$$\text{គណនាលីមីត } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{។}$$

$$១០-គេមាន $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + (a-1)x + 3 - 3a}{x^2 - 4x + 3}$$$

$$\text{គណនាលីមីត } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \text{និង} \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

$$១១-គេមាន $f(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{x^{p+1} - x^p - x + 1}$ ដែល $n \in \mathbb{N}$ និង $p \in \mathbb{N}$$$

$$\text{គណនា } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \text{។}$$

$$១២-មានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{\tan x - \sin x}{x^n}$ ដែល $n \in \mathbb{N}$$$

$$\text{កំណត់គ្រប់ } n \text{ ដែលធ្វើឲ្យ } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ ជាចំនួនពិត ។}$$

១៣-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{\cos x}$

ខ/ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x - 1}$

គ/ $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x^2} \left(\frac{2}{\cos x} + \cos x - 3 \right) \right]$

ឃ/ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sin \frac{\pi x}{2}}{(1 - x)^2}$

១៤-គេមាន $S_n = \frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} + \frac{1}{7 \times 11} + \dots + \frac{1}{(3n - 2)(3n + 1)}$

ក/កំណត់ពីរចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឲ្យចំពោះគ្រប់ $k \in \mathbb{N}$

គេបាន $\frac{1}{(3k - 2)(3k + 1)} = \frac{A}{3k - 2} + \frac{B}{3k + 1}$ ។

ខ/ប្រើសមភាពខាងលើចូរគណនា S_n រួចទាញរក $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ ។

១៥-ក/ គេមាន $k \in \mathbb{N}$ ។

ចូរស្រាយថា $0 < \frac{2k - 1}{2k} < \sqrt{\frac{2k - 1}{2k + 1}}$

ខ/តាង $u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n - 1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n}$ ។

បង្ហាញថា $0 < u_n < \frac{1}{\sqrt{2n + 1}}$ រួចទាញថា $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ។

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

១៦-គេមានពហុកោណនិយ័តចារឹកក្នុងរង្វង់ដែលមាន n ជ្រុង និងកាំ

ស្មើនឹង a ។ តាង S_n ជាផ្ទៃក្រឡានៃពហុកោណនេះ ។

គណនា S_n រួចកំណត់រកតម្លៃ $\lim_{x \rightarrow +\infty} S_n$ ។

១៧-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(2x+3)(2-x)}{(x^2+1)(2x+1)}$

ខ/ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x}{2e^x + 1}$

គ/ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x})$

ឃ/ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2x+3}{x+1}\right)$

ង/ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[4]{x^4 + 4x^3} + \sqrt[3]{x^3 + 3x^2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3x})$

១៨-គណនាលីមីត ៖

ក/ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x + 2} - 2\sqrt{x^2 - x + 3})$

ខ/ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 - x + 3})$

១៩-កំណត់តម្លៃ a ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + ax - \sqrt{1+x}}{x} = \frac{1}{8}$

២០-គណនាលីមីត $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[m]{x} - 1}$ ដែល $m, n \in \mathbb{N}$ ។

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

២១-គណនាលីមីត $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + (n-1)n}{n^3}$ ។

២២-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2}) \dots (1 - \frac{1}{n^2})$

ខ/ $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{n}{\sqrt{n^4 + 1}} + \frac{n}{\sqrt{n^4 + 2}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^4 + n}})$

២៣-ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ គេមាន ៖

$$S_n = \frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \dots + \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \sum_{p=0}^n \frac{2}{(2p+1)(2p+3)}$$

ក/គណនា S_n ជាអនុគមន៍នៃ n ដោយប្រើ $\frac{2}{(2p+1)(2p+3)}$

ជាទម្រង់ $\frac{a}{2p+1} + \frac{b}{2p+3}$ ។

ខ/ គណនា $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ ។

២៤-ដោយប្រើសមភាព $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$ ចូរគណនាផលបូក

$$S_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} \quad \text{រួចទាញរក} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \quad \text{។}$$

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

២៥-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

$$\text{ក/ } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2 \ln x}{1 - 2x + \ln x}$$

$$\text{ខ/ } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x + x - 1}{e^x + 1}$$

$$\text{គ/ } \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \ln(2e^x + 1)]$$

$$\text{ឃ/ } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - 2 \ln x}{1 + 3 \ln x}$$

$$\text{ង/ } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \ln x}{x + \ln x}$$

$$\text{ច/ } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^x + x - 1}{e^x + x}$$

២៦-គណនាលីមីត ៖

$$\text{ក/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$$

$$\text{ខ/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + x - 1}{x}$$

$$\text{គ/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - \cos 2x}{x^2}$$

$$\text{ឃ/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{x}$$

$$\text{ង/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$$

$$\text{ច/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$$

$$\text{ឆ/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{2x} - 2}{\sin x}$$

$$\text{ជ/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(e^{3x} - 1)}{x^2}$$

$$\text{ឈ/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin 2x} - \cos 2x}{\tan^2 x}$$

$$\text{ញ/ } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{2}{x}} - 1)$$

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

២៧-គណនាលីមីត ៖

$$\text{ក/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 4x)}{x}$$

$$\text{ខ/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 3x)}{x}$$

$$\text{គ/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - \cos x)}{x^2}$$

$$\text{ឃ/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x \sin 3x)}{x^2}$$

$$\text{ង/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$$

$$\text{ច/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 \cos x - \cos 2x)}{\sin^2 x}$$

$$\text{ឆ/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[(1 + x)(1 + 2x)]}{x}$$

$$\text{ជ/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \tan x)}{x}$$

$$\text{ឈ/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - e^x)}{x}$$

$$\text{ញ/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3 - 2 \cos x \sqrt{\cos 2x})}{x^2}$$

២៨-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

$$\text{ក/ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x) - \ln(1 - x)}{x}$$

$$\text{ខ/ } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^2 - 2x + 2)}{x^3 - 3x + 2}$$

$$\text{គ/ } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\tan x)}{\pi - 4x}$$

$$\text{ឃ/ } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}$$

$$\text{ង/ } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2 - 4x + 5)}{e^{x-2} + e^{2-x} - 2}$$

$$\text{ច/ } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(4 - x) - \ln 2}{x - 2}$$

$$\text{ឆ/ } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$$

$$\text{ជ/ } \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln^2 x - 3 \ln x + 2}{1 - \ln x}$$

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

២៩-គេឲ្យអនុគមន៍ f ធ្វើឱ្យផ្ទុកថា $x - \frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq x$ ចំពោះគ្រប់ x ។

គេតាង $S_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ ។ គណនាលីមីត $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ ។

៣០-គណនាលីមីត ៖

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 4x + 1} + \dots + \sqrt{x^2 + 2nx + 1} - \sqrt{n^2x^2 + 1})$$

៣១-គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ ៖

$$u_0 = 1, u_1 = 2 \text{ និង } u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2} \text{ ដែល } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ក/ចូរស្រាយថា } u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + \frac{5}{2} \text{ ។}$$

ខ/ គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ។

៣២-គេមានស្វ៊ីត $u_n = \sqrt{n + \sqrt{(n-1) + \dots + \sqrt{3 + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}$

គណនាលីមីត $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \sqrt{n})$ ។

៣៣-គេឲ្យ $a_k = \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$ តាង $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ រក $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$?

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

៣៤-គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x-3} - \sqrt[3]{x-1}}{x-2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[3]{x-1}}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2x-1}}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^3-1}}{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^4+1}}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x+1 - \sqrt[4]{4x+1}}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+1} - 3}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x-4} - \frac{x}{2}}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x - \sqrt[3]{3x-2}}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \sqrt{x} - 2}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} - 2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt[3]{x^2+4} - x}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - \sqrt{x^2+60}}{\sqrt[3]{x-3} + \sqrt[4]{x-1}}$$

៣៥-ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} + \sqrt{3x+1} - \sqrt{5x^2+4}}{x-1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{4x^2+4} - \sqrt{2x+2}}{x-1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{4x^2+4}}{x-1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt[6]{x^2+60}}{x^2 - \sqrt[3]{x^2+60}}$$

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

៣៦- ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$$1. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan^3 x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 x + \sin^3 x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{3 - 4\sin^2 x}{2\cos x - 1}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - x^2 - \sin^2 x}{\cos x - x + 1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos x - \sin 2x}{4\cos^2 x - 3}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{x^2 + 1}}{x^2 + \sin^2 x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan^4 x + \cot^4 x - 2}{1 - 2\sin 2x}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \sqrt[3]{\tan x}}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 8\sin^3 x}{4\cos^2 x - 3}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - \sin^4 x}{\sqrt{x^2 + 1} - \cos x}$$

៣៧- ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{2^x + 4} - 2}{4^x - 16}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \dots + \sqrt[n]{x} - n}{x - 1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x - \sqrt{2x + 2}}{4^{2x-1} - x^2 - 2x - 1}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} + \sqrt[n]{x} - 2}{x - 1}$$

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x - \sqrt{1+3^x}}{\sqrt{4^x - 1} - 3^2}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 + \sqrt[m]{x})(1 + \sqrt[n]{x}) - 4}{x - 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{e^{2x} - 2xe^x + x^2 - 1}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1+x^m)^n (1+x^n)^m - 2^{m+n}}{x-1}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{e^{3x} - 1}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+x^n} - \sqrt[m]{1-x^n}}{x^n}$$

៣៨-ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \sin 4x \cdot \sin 8x}{x^3}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(\sin 2x^3)}{x^6}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin[\sin(\sin x)]}{x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + 1 - \cos 4x}{x^2}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^3 2x \cdot \sin^2 3x}{\sin x^5}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x \sin^3 2x}{x^5}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \sin 2x \sin 3x \cdot \sin^2 x}{x^n}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3(\sin^2 4x)}{x^6}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan 2x) + \tan(\sin 4x)}{x}$$

៣៩- គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x + \cos 2x - 3}{x^2}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x^2}$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 2x}{\sin^2 4x}$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{x^3}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 3x}{x^2}$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 3 \cos 2x + 2 \cos 3x}{x^2}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x \dots \cos nx}{x^2}$

៤០- គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \sqrt{\cos 2x}}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^n x}{x \sin x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2 \cos x} - \sqrt{3}}{x^2}$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 3 \cos x} - 2}{1 - \cos^3 2x}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3 - \cos 2x}}{x^2}$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{\cos 2x}}{x^2}$

៤១- គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{1 - x^2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1 - x^3}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos 2x}{(\pi - x)^2}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 - x^2\right) \cdot \tan \frac{\pi x}{2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\left(\sin \frac{x}{4} - \cos \frac{x}{4}\right)^2}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sin \frac{\pi x}{2}}{(1 - x)^2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x) \tan x$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 2} (4 - x^2) \tan \frac{\pi}{x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8 + \tan \pi x}{2 - x}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{\cos \frac{\pi}{x+1}}$$

៤២- គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{(1 - x)^2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{\sin \frac{\pi}{x}}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^3 + \tan \pi x}{1 - x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos \frac{x}{2}}{\pi^2 - x^2}$$

៤៣-គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + \sin^3 x}{x^3}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{2 \sin x - \sin 2x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{\tan x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 3x}{x^2}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin x)}{x \sin x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{1 - \cos \sqrt{x}}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x}}{x \tan x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{1 - \cos(1 - \cos \sqrt{x})}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x^2} \left(\frac{2}{\cos x} - 3 \cos x + 1 \right) \right]$$

៤៤-គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x + \tan x}{x - \sin x - \tan x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \cos x} - \sqrt{(1+x)\cos x}}{\sin 3x - 3 \sin x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{1 - \cos 2x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{x + \cos \sqrt{x}}}{x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \cos x} - \sqrt{1 + \cos 5x}}{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos 5x}}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \cos x}} - 2}{x^2}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{1 - \cos 2x \sqrt{\cos x}}$$

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

៤៥-គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x^2) \tan \frac{\pi x}{2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{\sin(x - a)}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan \pi x}{1 - x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin^3 2x}{\tan x - \cos tx}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sin \frac{\pi x}{2}}{(1 - x)^2}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\pi}{4} - \arctan x}{1 - x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x - 2) \tan \frac{\pi}{x}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\arcsin x - \arccos x}{1 - x\sqrt{2}}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi^2 - 4x^2}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{(\pi - x)^2}$$

៤៦-គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x^3) \tan \frac{\pi}{1 + x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cot \frac{\pi}{x}}{4 - x^2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos \frac{x}{4} - \sin \frac{x}{4}}{\pi - x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\cos \frac{\pi}{x+1}}$$

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1 - x^2}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \tan \frac{\pi x}{3x - 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8 + \sin \pi x}{2 - x}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \sin \frac{\pi}{x}}{x^2 - 4x + 4}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - x)^2}{1 - \sin \frac{\pi}{x + 1}}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{\pi} - \sqrt{\arccos x}}{x + 1}$$

៤៧-គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1 + x^2} \tan \left(\frac{\pi x + 4}{2x + 3} \right)$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} (3x + 1) \sin \left(\frac{\pi x + 1}{x + 2} \right)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} (2x - 3) \cos \left(\frac{\pi x + 2}{2x + 1} \right)$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x + 1} \cot \left(\frac{\pi x + 1}{2x - 3} \right)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} (3x + 1) \tan \left(\frac{\pi x}{x + 1} \right)$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x^2 + 1} \cos \left(\frac{\pi x + 1}{2x + 3} \right)$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{x^2 + 4} \tan \left(\frac{3\pi x + 4}{6x - 5} \right)$$

$$10. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \sqrt{x + 1} - \cos \sqrt{x - 1} \right)$$