រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

បរិញ្ញាបត្រផ្នែកគណិតវិទ្យា

គណិតវិទ្យាជ្រើសរើស

សម្រាប់សិស្សពូកែថ្នាក់ទី ១០

$i^2=-1$

$\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\sqrt{a^2}=|a|$

$\mathbb{Z}$ β μ

$\tan\varphi=\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$

$\pm\infty$ $\sqrt{2}$

$\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$ $\perp$

π

$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

$\dfrac{1}{\sin^2\phi}=1+\cot^2\phi$

រួមមាន

- មេរៀនសង្ខេប
- លំហាត់គំរូ
- លំហាត់អនុវត្តន៍

រក្សាសិទ្ធិដោយ លឹម ផល្គុន

ស្របតាមកម្មវិធីសិក្សាថ្មី

គណៈកម្មការនិពន្ធ និង រៀបរៀង

លោក លឹម ផល្លុន

លោក សែន ពិសិដ្ឋ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក លឹម ឆុន	លោក អ៊ឹង សំណាង
លោកស្រី ទុយ វីណា	លោក ទិត្យ ម៉េង
លោក នន់ សុខណា	លោក ព្រឹម សុនិត្យ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិត្តសិរ

ការិយកុំព្យូទ័រ

លោក អ៊ឹង សំណាង

កញ្ញា លី គុណ្ណាកា

រចនាទំព័រ និង ក្រប

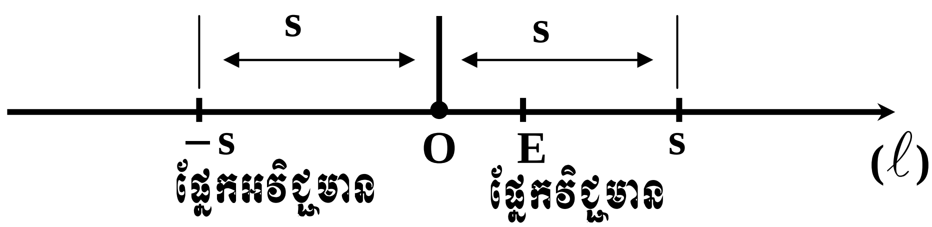
លោក ព្រុំ ម៉ាឡា

មេរៀនសង្ខេប

ចំនួនពិត និង ប្រព័ន្ធរបាប់

១_ចំនួនពិត

ក. បន្ទាត់ចំនួនពិត



-ចំនុច **O** ត្រូវនឹងចំនួន **0** ។

-គ្រប់ចំនុចនៅផ្នែកវិជ្ជមានហើយមានចម្ងាយ **s** ពីចំនុច **O** ត្រូវគ្នានឹងចំនួនវិជ្ជមាន **s** ។

-គ្រប់ចំនុចនៅផ្នែកអវិជ្ជមានហើយមានចម្ងាយ **s** ពីចំនុច **O** ត្រូវគ្នានឹងចំនួនអវិជ្ជមាន $-s$

ខ. ការប្រៀបធៀបចំនួនពិត

-ចំនួនពិត **b** ធំជាងចំនួនពិត **a** ឬ ចំនួនពិត **a** តូចជាងចំនួនពិត **b** ត្រូវបានគេកំណត់សរសេរ $b > a$ ឬ $a < b$ ។

-បើ **a** វិជ្ជមាននោះ $a > 0$ ។

-បើ **a** អវិជ្ជមាននោះ $a < 0$ ។

គេអាចប្រៀបធៀបចំនួនពិតតាមលក្ខណៈខាងក្រោម :

-ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ គេអាចបានទំនាក់ទំនងមួយក្នុងចំណោមទំនាក់ទំនងបី

គឺ $\mathbf{a<b}$, $\mathbf{a=b}$, $\mathbf{a>b}$ ។

-បើ $\mathbf{a>b}$ និង $\mathbf{b>c}$ នាំឱ្យ $\mathbf{a>c}$ ។

-បើ $\mathbf{a<b}$ និង $\mathbf{b<c}$ នាំឱ្យ $\mathbf{a<c}$ ។

-បើ $\mathbf{a=b}$ និង $\mathbf{b=c}$ នាំឱ្យ $\mathbf{a=c}$ ។

-បើ $\mathbf{a>b}$ សមមូល $\mathbf{a-b>0}$ ។

-បើ $\mathbf{a<b}$ សមមូល $\mathbf{a-b<0}$ ។

គ. តម្លៃដាច់ខាត

-តម្លៃដាច់ខាតនៃចំនួនពិត $\mathbf{a}$ កំណត់តាងដោយ $|\mathbf{a}|$ ។

-គ្រប់ចំនួនពិត $\mathbf{a}$ គេមាន $|\mathbf{a}|\geq \mathbf{0}$

-តម្លៃ $|\mathbf{a}|=\mathbf{0}$ លុះត្រាតែ $\mathbf{a=0}$

-ការបញ្ចេញតម្លៃដាច់ខាត $|\mathbf{a}| = \left[\begin{array}{lll} \mathbf{a} & \text{បើ} & \mathbf{a\geq 0} \\ \mathbf{-a} & \text{បើ} & \mathbf{a<0} \end{array}\right.$

២_គន្សោមរ៉ាឌីកាល់

ក.ផលគុណ និង ផលចែកឫសការេ

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\mathbf{a>0}$ និង $\mathbf{b>0}$ គេមាន :

1. $\sqrt{\mathbf{a}}\times\sqrt{\mathbf{b}}=\sqrt{\mathbf{ab}}$

2. $\dfrac{\sqrt{\mathbf{a}}}{\sqrt{\mathbf{b}}}=\sqrt{\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}}$

ខ.ប្រៀបធៀបឫសការេនៃចំនួនវិជ្ជមានពីរ

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\mathbf{a>0}$ និង $\mathbf{b>0}$ គេមាន :

1. $\mathbf{a<b \Leftrightarrow \sqrt{a}<\sqrt{b}}$

2. $\mathbf{a>b \Leftrightarrow \sqrt{a}>\sqrt{b}}$

គ.ការបំបាត់រ៉ាឌីកាល់ពីភាគបែង

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\mathbf{a>0}$ និង $\mathbf{b>0}$ ដែល $\mathbf{a\neq b}$ គេមាន :

$\mathbf{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b}$ ដូចនេះគេមានសមភាព :

1. $$\mathbf{\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})c}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})c}{a-b}}$$

2. $$\mathbf{\frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})c}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})c}{a-b}}$$

ឃ.ការសម្រួលរ៉ាឌីកាល់ពីរជាន់

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\mathbf{a>0}$ និង $\mathbf{b>0}$ ដែល $\mathbf{a\geq b}$ គេមាន :

$\mathbf{\sqrt{a+b\pm 2\sqrt{ab}}=\sqrt{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$ ។

៣_ប្រព័ន្ធរាប់

ក.ប្រព័ន្ធគោល $\mathbf{10}$

$$\mathbf{(a_n a_{n-1}.....a_2 a_1 a_0)_{10}=a_n\times 10^n+a_{n-1}\times 10^{n-1}+....+a_2\times 10^2+a_1\times 10+a_0}$$

ខ.ប្រព័ន្ធគោល $\mathbf{2}$

$$\mathbf{(a_n a_{n-1}.....a_2 a_1 a_0)_{2}=a_n\times 2^n+a_{n-1}\times 2^{n-1}+....+a_2\times 2^2+a_1\times 2+a_0}$$ ។

កម្រងលំហាត់ជ្រើសរើស

1. គេឱ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតមិនសូន្យ ។

ចូរកំណត់តម្លៃដែលអាចនៃកន្សោម $A=\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}$?

2. ចូរកំណត់លក្ខខណ្ឌ a និង b ដើម្បីឱ្យគេបានសមភាពដូចខាងក្រោម :

$\left|\frac{a-b}{a}\right|=\frac{b-a}{a}$?

3. គេឱ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់

$(3a+6)^2+|\frac{1}{4}b-10|+|c+3|=0$

ចូរកំណត់តម្លៃនៃ $a^{10}+bc$?

4. គេឱ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតដែល $a<b<c$ ។

ចូរកំនត់តម្លៃតូចបំផុតនៃកន្សោម : $y=|x-a|+|x-b|+|x-c|$

5. គេដឹងថា $c>1$ ហើយគេមាន $x=\frac{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}}{\sqrt{c}-\sqrt{c-1}}$, $y=\frac{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}}{\sqrt{c+1}-\sqrt{c}}$

និង $z=\frac{\sqrt{c}-\sqrt{c-1}}{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}}$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $x<y<z$?

6. គេឱ្យ x ជាចំនួនពិតមួយ ។ គេយក $A=\frac{-1+3x}{1+x}-\frac{\sqrt{|x|-2}+\sqrt{2-|x|}}{|2-x|}$

ចូរបង្ហាញថា A ជាចំនួនគត់ ។

7. គេឱ្យ $x=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ និង $y=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

ចូរកំណត់តម្លៃ $S=x^4+y^4+(x+y)^4$ ។

8. គណនាតម្លៃនៃកន្សោម :

$$P=(\sqrt{10}+\sqrt{11}+\sqrt{12})(\sqrt{10}+\sqrt{11}-\sqrt{12})(\sqrt{10}-\sqrt{11}+\sqrt{12})(\sqrt{10}-\sqrt{11}-\sqrt{12})$$

9.គណនា $N=\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{35}+\sqrt{21}+5}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{7}}$

10. សម្រួល $A=\sqrt{2+\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}-\sqrt{2-\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}$

11. គេដឹងថា $x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}$ ។

គណនាតម្លៃ $A=\dfrac{x^4-6x^3-2x^2+18x+23}{x^2-8x+15}$

12. សម្រួល $y=\sqrt[3]{a+\dfrac{a+8}{3}\sqrt{\dfrac{a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\dfrac{a+8}{3}\sqrt{\dfrac{a-1}{3}}}$ ដែល $a\geq 1$ ។

13. គេឱ្យចំនួន $A=21a78_{10}$ និង $B=87b12_{10}$ ដែល a និង b ជាលេខ ។

បើ $A\times 4=B$ នោះចូរកំណត់គ្រប់គូ (a,b) ?

14.គេឱ្យ a , b , c ជាលេខ ។

គេតាង $x=ab_{10}$, $y=x-10$ និង $z=ccc_{10}$

គេដឹងថា $x.y=z$ ។ ចូរកំណត់គូ (a,b,c)

15. គេឱ្យចំនួន $n=aabb_{10}$ ដែល a និង b ជាលេខ ។

ក. ចូរបង្ហាញថាគ្រប់លេខ a និង b ចំនួន n ចែកដាច់នឹង 11 ជានិច្ច ។

ខ. គេយក $q=\frac{n}{11}$ ។ បង្ហាញថាបើ q ចែកដាច់នឹង 11 នោះមានគូ$(a\ ,\ b)$តែមួយគត់ដែល n ជាការេប្រាកដ ?

16. គេឱ្យចំនួន $n=\overline{aaaaaa}_{10}$ ដែល $a=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

ក. ចូរស្រាយថា n ចែកដាច់នឹង 7 ជានិច្ច ។

ខ. ចូរកំណត់គ្រប់លេខ a ដើម្បីឱ្យ n មានតួចែកយ៉ាងតិចមួយជាការេប្រាកដធំជាង 1 ។

17. គេឱ្យចំនួន $n=\overline{aaabbb}_{10}$ ដែល $a\neq b$ និង $a\ ,b$ ជាលេខ ។

ក.ចូរសរសេរ n ជាទម្រង់ពន្លាត រួចបង្រួម ។

ខ. កំណត់គ្រប់គូ $(a\ ,\ b\ )$ ដែលធ្វើឱ្យ n ចែកដាច់នឹង 7 ។

18. គេឱ្យចំនួន $n=\overline{abcd}_2$ ក្នុងប្រព័ន្ធរាប់គោល 2 ដែល $a\ ,\ b\ ,\ c\ ,\ d\in\{0,1\}$ ។

ក. ចូរសរសេរ n ជាទម្រង់ពន្លាត ។

ខ. បើ $a=b=c=1$ នោះចូរកំណត់ d ដើម្បីឱ្យ n ចែកដាច់នឹង 5 ។

គ. បើ $a=b=d=1$ នោះចូរកំណត់ c ដើម្បីឱ្យ n ចែកដាច់នឹង 3 ។

ឃ. បើ $a=c=d=1$ នោះចូរកំណត់ b ដើម្បីឱ្យ n ចែកដាច់នឹង 11 ។

19.គេឱ្យចំនួន $n=1100101_2$ (ក្នុងប្រព័ន្ធគោល 2)

និងចំនួន $p=\overline{14285b}_{10}$(ក្នុងប្រព័ន្ធគោល 10)

ក.ចូរសរសេរ n ទៅជាចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធគោល 10 ។

ខ.កំណត់លេខ b ដើម្បីឱ្យ$\frac{p\times b+1}{9(n+6)+10}$ ជាចំនួនគត់ ?

20. គេឱ្យចំនួន $\mathbf{m = 21a7b_{10}}$ និង $\mathbf{n = b7a12_{10}}$

ចូរកំណត់លេខ **a** និង **b** ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{\frac{n}{m} = 4}$?

រៀបរៀងដោយ **លឹម ផល្គុន**

Tel : 017 768 246

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី១

គេឱ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតមិនសូន្យ ។

ចូរកំណត់តម្លៃដែលអាចនៃកន្សោម $A = \dfrac{a}{|a|} + \dfrac{b}{|b|} + \dfrac{c}{|c|}$?

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃដែលអាចនៃកន្សោម $A = \dfrac{a}{|a|} + \dfrac{b}{|b|} + \dfrac{c}{|c|}$

-បើ $a > 0 , b > 0 , c > 0$ (វិជ្ជមានទាំងបី)

គេបាន $A = \dfrac{a}{a} + \dfrac{b}{b} + \dfrac{c}{c} = 1 + 1 + 1 = 3$ ។

-បើ $a < 0 , b < 0 , c < 0$ (អវិជ្ជមានទាំងបី)

គេបាន $A = \dfrac{a}{-a} + \dfrac{b}{-b} + \dfrac{c}{-c} = -1 - 1 - 1 = -3$ ។

-បើក្នុងចំណោម a , b , c មានអវិជ្ជមានមួយ និង វិជ្ជមានពីរ

គេបាន $A = -1 + 1 + 1 = 1$ ។

-បើក្នុងចំណោម a , b , c មានអវិជ្ជមានពីរ និង វិជ្ជមានមួយ

គេបាន $A = -1 - 1 + 1 = -1$ ។

ដូចនេះតម្លៃដែលអាចនៃ A គឺ $-3 , -1 , 1$ និង 3 ។

លំហាត់ទី២

ចូរកំណត់លក្ខខណ្ឌ $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ដើម្បីឱ្យគេបានសមភាពដូចខាងក្រោម :

$$\left|\frac{a-b}{a}\right| = \frac{b-a}{a} \quad ?$$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់លក្ខខណ្ឌ $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$

សមភាពដែលឱ្យ $\left|\frac{a-b}{a}\right| = \frac{b-a}{a}$ ពិតលុះត្រាតែ :

$a \neq 0$ និង $\frac{a-b}{a} \leq 0$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{b}{a} \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad \frac{b}{a} \geq 1$

ដូចនេះគេមានលក្ខខណ្ឌ $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ គឺ $\frac{b}{a} \geq 1$ និង $a \neq 0$ ។

លំហាត់ទី៣

គេឱ្យ **a , b , c** ជាបីចំនួនពិតផ្សេងផ្ទាត់ $(3a+6)^2+|\frac{1}{4}b-10|+|c+3|=0$

ចូរកំណត់តម្លៃនៃ $a^{10}+bc$?

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃនៃ $a^{10}+bc$

គេមាន $(3a+6)^2+|\frac{1}{4}b-10|+|c+3|=0$

យើងឃើញថាអង្គខាងឆ្វេងនៃសមីការសុទ្ធតែជាចំនួនមិនអវិជ្ជមាន ។

ហេតុនេះយើងត្រូវតែបាន $\begin{cases} 3a+6=0 \\ \frac{1}{4}b-10=0 \\ c+3=0 \end{cases}$

គេទាញ $a=-2$, $b=40$, $c=-3$

ដូចនេះ $a^{10}+bc=(-2)^{10}+(40)(-3)=1024-120=904$ ។

លំហាត់ទី៤

គេឱ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតដែល $a < b < c$ ។

ចូរកំនត់តម្លៃតូចបំផុតនៃកន្សោម : $y = |x-a| + |x-b| + |x-c|$

ដំណោះស្រាយ

កំនត់តម្លៃតូចបំផុត

គេមាន $y = |x-a| + |x-b| + |x-c|$

-ករណី $x \le a$

គេបាន $y = (a-x)+(b-x)+(c-x) \ge (b-a)+(c-a)$

-ករណី $a < x \le b$

គេបាន

$$y = (x-a)+(b-x)+(c-x) = (b-a)+(c-x) \ge (b-a)+(c-b) = c-a$$

-ករណី $b < x \le c$

គេបាន

$$y = (x-a)+(x-b)+(c-x) = (x-a)+(c-b) > (b-a)+(c-b) = c-a$$

-ករណី $c < x$

គេបាន

$$y = (x-a)+(x-b)+(x-c) > (b-a)+(c-b)+(x-c) > c-a$$

ដូចនេះ $y_{min} = c-a$ ដែលត្រូវនឹង $x = b$ ។

លំហាត់ទី៥

គេដឹងថា $c>1$ ហើយគេមាន $x=\frac{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}}{\sqrt{c}-\sqrt{c-1}}$, $y=\frac{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}}{\sqrt{c+1}-\sqrt{c}}$

និង $z=\frac{\sqrt{c}-\sqrt{c-1}}{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}}$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $x<y<z$?

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $x<y<z$

គេមាន $x=\frac{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}}{\sqrt{c}-\sqrt{c-1}}$

$$=\frac{[(\sqrt{c+2})^2-(\sqrt{c+1})^2](\sqrt{c}+\sqrt{c-1})}{(\sqrt{c+2}+\sqrt{c+1})[(\sqrt{c})^2-(\sqrt{c-1})^2]}$$

$$=\frac{\sqrt{c}+\sqrt{c-1}}{\sqrt{c+2}+\sqrt{c+1}}$$

$$y=\frac{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}}{\sqrt{c+1}-\sqrt{c}}=\frac{[(\sqrt{c+2})^2-(\sqrt{c+1})^2](\sqrt{c+1}+\sqrt{c})}{(\sqrt{c+2}+\sqrt{c+1})[(\sqrt{c+1})^2-(\sqrt{c})^2]}$$

$$=\frac{\sqrt{c+1}+\sqrt{c}}{\sqrt{c+2}+\sqrt{c+1}}$$

គេទាញបាន $x<y$ ព្រោះ $\sqrt{c}+\sqrt{c-1}<\sqrt{c+1}+\sqrt{c}$ ។

ហើយ $z=\frac{\sqrt{c}-\sqrt{c-1}}{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}}=\frac{\sqrt{c+2}+\sqrt{c+1}}{\sqrt{c}+\sqrt{c-1}}$

ដោយ $\sqrt{c}+\sqrt{c-1}<\sqrt{c+1}+\sqrt{c}<\sqrt{c+2}+\sqrt{c+1}$ នោះ $x<y<z$ ពិត ។

លំហាត់ទី៦

គេឱ្យ x ជាចំនួនពិតមួយ ។ គេយក $A=\frac{-1+3x}{1+x}-\frac{\sqrt{|x|-2}+\sqrt{2-|x|}}{|2-x|}$

ចូរបង្ហាញថា A ជាចំនួនគត់ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា A ជាចំនួនគត់

$A=\frac{-1+3x}{1+x}-\frac{\sqrt{|x|-2}+\sqrt{2-|x|}}{|2-x|}$ មានន័យ លុះត្រាតែ $\begin{cases}|x|-2\geq 0\\ 2-|x|\geq 0\\ |2-x|\neq 0\end{cases}$

សមមូល $\begin{cases}|x|=2\\ x\neq 2\end{cases}$ នាំឱ្យ $x=-2$

ចំពោះ $x=-2$ គេបាន $A=\frac{-1-6}{1-2}-\frac{0}{4}=7$

ដូចនេះ $A=7$ ជាចំនួនគត់ ។

លំហាត់ទី៧

គេឱ្យ $\mathbf{x}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ និង $\mathbf{y}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

ចូរកំណត់តម្លៃ $\mathbf{S}=\mathbf{x}^4+\mathbf{y}^4+(\mathbf{x}+\mathbf{y})^4$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃ $\mathbf{S}=\mathbf{x}^4+\mathbf{y}^4+(\mathbf{x}+\mathbf{y})^4$

គេមាន $\mathbf{x}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2}{\sqrt{7}^2-\sqrt{3}^2}=\frac{10+2\sqrt{21}}{4}$

និង $\mathbf{y}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2}{7-3}=\frac{10-2\sqrt{21}}{4}$

គេបាន $\mathbf{x}+\mathbf{y}=5$ និង $\mathbf{xy}=1$

គេមាន $\mathbf{S}=\mathbf{x}^4+\mathbf{y}^4+(\mathbf{x}+\mathbf{y})^4$

$$
\begin{aligned}
&=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2+(x+y)^4\\
&=\left[(x+y)^2-2xy\right]^2-2x^2y^2+(x+y)^4\\
&=(25-2)^2-2+5^4\\
&=529-2+625\\
&=1152
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ $\mathbf{S}=1152$ ។

លំហាត់ទី៨

គណនាតម្លៃនៃកន្សោម :

$$\mathbf{P=(\sqrt{10}+\sqrt{11}+\sqrt{12})(\sqrt{10}+\sqrt{11}-\sqrt{12})(\sqrt{10}-\sqrt{11}+\sqrt{12})(\sqrt{10}-\sqrt{11}-\sqrt{12})}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃ **P**

គេមាន $\mathbf{M=(\sqrt{10}+\sqrt{11}+\sqrt{12})(\sqrt{10}+\sqrt{11}-\sqrt{12})}$

$$\mathbf{=(\sqrt{10}+\sqrt{11})^2-(\sqrt{12})^2}$$

$$\mathbf{=10+2\sqrt{110}+11-12}$$

$$\mathbf{=9+2\sqrt{110}}$$

និង $\mathbf{N=(\sqrt{10}-\sqrt{11}+\sqrt{12})(\sqrt{10}-\sqrt{11}-\sqrt{12})}$

$$\mathbf{=(\sqrt{10}-\sqrt{11})^2-(\sqrt{12})^2}$$

$$\mathbf{=10-2\sqrt{110}+11-12}$$

$$\mathbf{=9-2\sqrt{110}}$$

គេបាន $\mathbf{P=M.N=(9+2\sqrt{110})(9-2\sqrt{110})}$

$$\mathbf{=81-440=-359}$$

ដូចនេះ $\mathbf{P=-359}$ ។

លំហាត់ទី៩

គណនា $\mathbf{N}=\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{35}+\sqrt{21}+5}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{7}}$

ដំណោះស្រាយ

គណនា $\mathbf{N}=\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{35}+\sqrt{21}+5}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{7}}$

គេមាន $\mathbf{N}=\dfrac{(\sqrt{15}+\sqrt{21})+(\sqrt{35}+5)}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})+(\sqrt{5}+\sqrt{7})}=\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{7})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})+(\sqrt{5}+\sqrt{7})}$

គេបាន $\dfrac{1}{\mathbf{N}}=\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})+(\sqrt{5}+\sqrt{7})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{7})}=\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

$$=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}=\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$$

ដូចនេះ $\mathbf{N}=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$ ។

លំហាត់ទី១០

សម្រួល $\mathbf{A}=\sqrt{2+\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}-\sqrt{2-\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}$

ដំណោះស្រាយ

សម្រួល $\mathbf{A}=\sqrt{2+\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}-\sqrt{2-\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}$

តាង $\mathbf{a}=\sqrt{2+\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}$ និង $\mathbf{b}=\sqrt{2-\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}$

គេបាន $\mathbf{a^2+b^2=4}$ និង $\mathbf{ab}=\sqrt{4-(-2+2\sqrt{5})}=\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{5}-1$

គេមាន $(\mathbf{a-b})^2=\mathbf{a^2+b^2-2ab}=4-2\sqrt{5}+2=(\sqrt{5}-1)^2$

គេទាញបាន $\mathbf{a-b}=\sqrt{5}-1$

ដូចនេះ $\mathbf{A=a-b}=\sqrt{5}-1$ ។

លំហាត់ទី១១

គេដឹងថា $x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}$ ។

គណនាតម្លៃ $A=\dfrac{x^4-6x^3-2x^2+18x+23}{x^2-8x+15}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃ $A=\dfrac{x^4-6x^3-2x^2+18x+23}{x^2-8x+15}$

គេមាន $x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}=\sqrt{(4-\sqrt{3})^2}=4-\sqrt{3}$

នាំឱ្យ $(x-4)^2=3$ ឬ $x^2-8x+13=0$

កន្សោម A អាចសរសេរមួយបែបទៀតគឺ :

$A=\dfrac{(x^2-18x+13)(x+1)^2+10}{(x^2-8x+13)+2}$ ដោយ $x^2-8x+13=0$

ដូចនេះ $A=\dfrac{10}{2}=5$ ។

លំហាត់ទី១២

សម្រួល $y=\sqrt[3]{a+\frac{a+8}{3}\sqrt{\frac{a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\frac{a+8}{3}\sqrt{\frac{a-1}{3}}}$ ដែល $a\geq 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

សម្រួល $y=\sqrt[3]{a+\frac{a+8}{3}\sqrt{\frac{a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\frac{a+8}{3}\sqrt{\frac{a-1}{3}}}$

យក $x=\sqrt{\frac{a-1}{3}}$ នាំឱ្យ $a=3x^2+1$ និង $\frac{a+8}{3}=x^2+3$

កន្សោមខាងដើមអាចសរសេរជា :

$$y=\sqrt[3]{3x^2+1+x(x^2+3)}+\sqrt[3]{3x^2+1-x(x^2+3)}$$

$$=\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1}+\sqrt[3]{1-3x+3x^2-x^3}$$

$$=\sqrt[3]{(x+1)^3}+\sqrt[3]{(1-x)^3}$$

$$=x+1+1-x=2$$

ដូចនេះ $y=2$ ។

លំហាត់ទី១៣

គេឱ្យចំនួន $A = \overline{21a78}_{10}$ និង $B = \overline{87b12}_{10}$ ដែល a និង b ជាលេខ ។

បើ $A \times 4 = B$ នោះចូរកំណត់គ្រប់គូ (a,b) ?

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គ្រប់គូ (a,b)

គេមាន $A = \overline{21a78}_{10} = 2\times 10^4 + 1\times 10^3 + a\times 10^2 + 7\times 10 + 8$

$$A = 21078 + 100a$$

ហើយ $B = \overline{87b12}_{10} = 8\times 10^4 + 7\times 10^3 + b\times 10^2 + 1\times 10 + 2$

$$B = 87012 + 100b$$

ដោយ $A \times 4 = B$ នោះ $4(21078 + 100a) = 87012 + 100b$

ឬ $84312 + 400a = 87012 + 100b$

$$400a - 100b = 87012 - 84312$$

$$100(4a - b) = 2700$$

$$4a - b = 27$$

គេទាញ $a = \dfrac{27 + b}{4}$

ដោយ b ជាលេខនោះ $b = \{0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 ,8 , 9\}$

ហើយដោយ a ជាលេខដែរនោះតម្លៃដែលអាចរបស់ b គឺ $\{1 , 5 , 9 \}$

ដូចនេះ $(a,b) = \{(7,1),(8 ,5) , (9, 9)\}$ ។

លំហាត់ទី១៤

គេឱ្យ a , b , c ជាលេខ ។

គេតាង $x = \overline{ab}_{10}$, $y = x - 10$ និង $z = \overline{ccc}_{10}$

គេដឹងថា $x.y = z$ ។ ចូរកំណត់គូ (a, b, c)

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គូ (a, b, c)

គេមាន $x = \overline{ab}_{10} = 10a + b$, $y = x - 10 = 10a + b - 10$

និង $z = \overline{ccc}_{10} = c\times 10^2 + c\times 10 + c = 111\,c$

ដោយ $xy = z$ នោះ $x(x - 10) = 111c$

ឬ $x^2 - 10x - 111c = 0 \quad (E)$

ឌីសគ្រីមីណង់បង្រួមនៃសមីការ $\Delta' = 25 + 111c$

ដោយ x ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាននោះ Δ' ជាការេប្រាកដ ។

គេមាន $c \neq 0$ និង $c = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 \}$

គេទាញបាន $c = 9$ តែមួយគត់ដែលនាំឱ្យ $\Delta' = 1024 = (32)^2$ ជាការេប្រាកដ ។

ក្នុងករណីនេះគេបាន $x_1 = 5 + 32 = 37$; $x_2 = 5 - 32 = -27$ (មិនយក)

ដូចនេះ $x = 37$ តែ $x = 10a + b$ នោះគេទាញ $a = 3 , b = 7$ ។

ដូចនេះ $a = 3 , b = 7 , c = 9$ ។

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $x = 37 , y = 27 , z = 999$ នោះ $37\times 27 = 999$ ពិត ។

លំហាត់ទី១៥

គេឱ្យចំនួន $\mathbf{n = aabb_{10}}$ ដែល **a** និង **b** ជាលេខ ។

ក. ចូរបង្ហាញថាគ្រប់លេខ **a** និង **b** ចំនួន **n** ចែកដាច់នឹង **11** ជានិច្ច ។

ខ. គេយក $\mathbf{q = \frac{n}{11}}$ ។ បង្ហាញថាបើ **q** ចែកដាច់នឹង **11** នោះមានគូ$\mathbf{(a , b)}$តែមួយគត់ដែល **n** ជាការេប្រាកដ ?

ដំណោះស្រាយ

ក.បង្ហាញថាគ្រប់លេខ **a** និង **b** ចំនួន **n** ចែកដាច់នឹង **11** ជានិច្ច

គេមាន $\mathbf{n = aabb_{10} = a\times 10^3 + a\times 10^2 + b\times 10 + b}$

$\mathbf{n = 1100a + 11b = 11(100a + b)}$ ជាពហុគុណនៃ **11** ។

ដូចនេះគ្រប់លេខ **a** និង **b** ចំនួន **n** ចែកដាច់នឹង **11** ជានិច្ច ។

ខ.កំណត់គូ $\mathbf{(a,b)}$

គេមាន $\mathbf{q = \frac{n}{11} = 100a + b = 99a + (a + b)}$

ចំនួន **q** ចែកដាច់នឹង **11** លុះត្រាតែ $\mathbf{a + b}$ ចែកដាច់នឹង **11** ។

ដោយ **a** និង **b** ជាលេខនោះ $\mathbf{0 < a + b \le 18}$ នាំឱ្យ $\mathbf{a + b = 11}$

គេបាន $\mathbf{q = 99a + 11 = 11(9a + 1)}$

គេទាញ $\mathbf{n = 11q = 11^2 (9a + 1)}$ ។ ចំពោះ $\mathbf{a = 1 , 2 , 3, ..., 9}$ តម្លៃដែលធ្វើឱ្យ **n** ជាការេប្រាកដមានតែមួយគត់គឺ $\mathbf{a = 7}$ ដែលត្រូវនឹង $\mathbf{b = 11 - 7 = 4}$ ។

ដូចនេះ $\mathbf{a = 7 , b = 4}$ ហើយ $\mathbf{n = 7744 = 88^2}$ ។

លំហាត់ទី១៦

គេឱ្យចំនួន $\mathbf{n = \overline{aaaaaa}_{10}}$ ដែល $\mathbf{a = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}}$

ក. ចូរស្រាយថា $\mathbf{n}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{7}$ ជានិច្ច ។

ខ. ចូរកំណត់គ្រប់លេខ $\mathbf{a}$ ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{n}$ មានតួចែកយ៉ាងតិចមួយជាការេប្រាកដធំជាង $\mathbf{1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា $\mathbf{n}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{7}$ ជានិច្ច

គេមាន $\mathbf{n = \overline{aaaaaa}_{10}}$

$$\begin{aligned}
&= a\times10^5 + a\times10^4 + a\times10^3 + a\times10^2 + a\times10 + a \\
&= (10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1)\times a \\
&= 111111\times a \\
&= 15873\times7\times a
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\mathbf{n}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{7}$ ជានិច្ច ។

ខ. កំណត់គ្រប់លេខ $\mathbf{a}$ ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{n}$ មានតួចែកជាការេប្រាកដ :

គេមាន $\mathbf{111111 = 3\times7\times11\times13\times37}$

គេបាន $\mathbf{n = 3\times7\times11\times13\times37\times a}$ ដែល $\mathbf{a = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}}$

ដូចនេះដើម្បីឱ្យ $\mathbf{n}$ មានតួចែកយ៉ាងតិចមួយដែលជាការេប្រាកដលុះត្រាតែ

$\mathbf{a = 3 , 4 , 6 , 7 , 8 , 9}$ ។

លំហាត់ទី១៧

គេឱ្យចំនួន $\mathbf{n = \overline{aaabbb}_{10}}$ ដែល $\mathbf{a \neq b}$ និង $\mathbf{a\ ,b}$ ជាលេខ ។

ក.ចូរសរសេរ $\mathbf{n}$ ជាទម្រង់ពន្លាត រួចបង្រួម ។

ខ. កំណត់គ្រប់គូ $\mathbf{(a\ ,\ b\ )}$ ដែលធ្វើឱ្យ $\mathbf{n}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{7}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.សរសេរ $\mathbf{n}$ ជាទម្រង់ពន្លាត រួចបង្រួម

គេមាន $\mathbf{n = \overline{aaabbb}_{10}}$

$$\mathbf{= a\times 10^5 + a\times 10^4 + a\times 10^3 + b\times 10^2 + b\times 10 + b}$$

$$\mathbf{= a\times 10^3(10^2 + 10 + 1) + b(10^2 + 10 + 1)}$$

$$\mathbf{= 111(1000a + b)}$$

ខ.កំណត់គ្រប់គូ $\mathbf{(a\ ,\ b\ )}$ ដែលធ្វើឱ្យ $\mathbf{n}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{7}$

គេអាចសរសេរ :

$$\mathbf{n = 111(1000a + b)}$$

$$\mathbf{= 3\times 37\times (1000a + b)}$$

$$\mathbf{= 3\times 37\times [142\times 7a + (6a + b)]}$$

ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{n}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{7}$ លុះត្រាតែ $\mathbf{6a + b}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{7}$ ។

ដោយ $\mathbf{a \neq b}$ និង $\mathbf{a \neq 0}$ ដូចនេះដើម្បីឱ្យ $\mathbf{6a + b}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{7}$ លុះត្រាតែ :

$\mathbf{(a,b) \in \{(1,8),(2,9),(7,0),(8,1),(9,2)\}}$ ។

លំហាត់ទី១៨

គេឱ្យចំនួន $\mathbf{n=abcd_2}$ ក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់គោល **2** ដែល $\mathbf{a , b , c , d \in \{0,1\}}$ ។

ក. ចូរសរសេរ $\mathbf{n}$ ជាទម្រង់ពន្លាត ។

ខ. បើ $\mathbf{a=b=c=1}$ នោះចូរកំណត់ $\mathbf{d}$ ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{n}$ ចែកដាច់នឹង **5** ។

គ. បើ $\mathbf{a=b=d=1}$ នោះចូរកំណត់ $\mathbf{c}$ ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{n}$ ចែកដាច់នឹង **3** ។

ឃ. បើ $\mathbf{a=c=d=1}$ នោះចូរកំណត់ $\mathbf{b}$ ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{n}$ ចែកដាច់នឹង **11** ។

ដំណោះស្រាយ

ក. សរសេរ $\mathbf{n}$ ជាទម្រង់ពន្លាត

គេបាន $\mathbf{n=abcd_2=a\times 2^3+b\times 2^2+c\times 2+d}$

ខ. កំណត់ $\mathbf{d}$ ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{n}$ ចែកដាច់នឹង **5**

បើ $\mathbf{a=b=c=1}$ នោះ $\mathbf{n=2^3+2^2+2+d=14+d}$

ដូចនេះដើម្បីឱ្យ $\mathbf{n}$ ចែកដាច់នឹង **5** គឺមានតែ $\mathbf{d=1}$ ។

គ. កំណត់ $\mathbf{c}$ ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{n}$ ចែកដាច់នឹង **3**

បើ $\mathbf{a=b=d=1}$ នោះ $\mathbf{n=2^3+2^2+2c+1=13+2c}$

ដូចនេះ ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{n}$ ចែកដាច់នឹង **3** គឺមានតែ $\mathbf{c=1}$ ។

ឃ. កំណត់ $\mathbf{b}$ ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{n}$ ចែកដាច់នឹង **11**

បើ $\mathbf{a=c=d=1}$ នោះ $\mathbf{n=2^3+4b+2+1=11+4b}$

ដូចនេះ ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{n}$ ចែកដាច់នឹង **11** គឺមានតែ $\mathbf{b=0}$ ។

លំហាត់ទី១៩

គេឱ្យចំនួន $\mathbf{n = 1100101_2}$ (ក្នុងប្រព័ន្ធគោល **2**)

និងចំនួន $\mathbf{p = 14285b_{10}}$ (ក្នុងប្រព័ន្ធគោល **10**)

ក.ចូរសរសេរ **n** ទៅជាចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធគោល **10** ។

ខ.កំណត់លេខ **b** ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{\dfrac{p\times b+1}{9(n+6)+10}}$ ជាចំនួនគត់ ?

ដំណោះស្រាយ

ក.សរសេរ **n** ទៅជាចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធគោល **10**

គេបាន $\mathbf{n = 1100101_2}$

$$\mathbf{= 1\times 2^6 + 1\times 2^5 + 1\times 2^2 + 1 = 104}$$

ដូចនេះ $\mathbf{n = 104}$

ខ.កំណត់លេខ **b** ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{\dfrac{p\times b+1}{9(n+6)+10}}$ ជាចំនួនគត់

គេមាន $\mathbf{9(n+6)+10 = 990+10 = 1000}$

ហើយ $\mathbf{p = 14285b_{10} = 142850 + b}$ នាំឱ្យ $\mathbf{p\times b + 1 = (142850+b)b+1}$

ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{\dfrac{p\times b+1}{9(n+6)+10}}$ ជាចំនួនគត់លុះត្រាតែ $\mathbf{(142850+b)b+1}$ ចែកដាច់នឹង **1000**

ដោយ **b** ជាលេខនោះគេបាន $\mathbf{b = 7}$ តែមួយគត់ព្រោះចំពោះ $\mathbf{b = 7}$ គេបាន :

$\mathbf{(142850+b)b+1 = 142857\times 7 + 1 = 1000000}$ ចែកដាច់នឹង **1000** ។

ដូចនេះ $\mathbf{b = 7}$ ជាចម្លើយដែលត្រូវរក ។

លំហាត់ទី២០

គេឱ្យចំនួន $\mathbf{m = 21a7b_{10}}$ និង $\mathbf{n = b7a12_{10}}$

ចូរកំណត់លេខ **a** និង **b** ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{\frac{n}{m} = 4}$?

ដំណោះស្រាយ

កំណត់លេខ **a** និង **b**

គេមាន $\mathbf{m = 21a7b_{10}}$

$$\mathbf{= 20000 + 1000 + 100a + 70 + b}$$

$$\mathbf{= 21070 + 100a + b}$$

និង $\mathbf{n = b7a12_{10}}$

$$\mathbf{= 10000b + 7000 + 100a + 10 + 2}$$

$$\mathbf{= 10000b + 100a + 7012}$$

ដោយ $\mathbf{\frac{n}{m} = 4}$ នោះ $\mathbf{n = 4m}$

$$\mathbf{10000b + 100a + 7012 = 4(20170 + 100a + b)}$$

$$\mathbf{9996b - 3000a = 73668}$$

$$\mathbf{3332b - 1000a = 24556}$$

គេទាញ $\mathbf{a = \frac{3332b - 24556}{1000}}$

ដោយ $\mathbf{a \geq}$ នោះ $\mathbf{b \geq \frac{25556}{3332}}$ ឬ $\mathbf{b \geq 8}$ ហេតុនេះ $\mathbf{b = 8}$ ឬ $\mathbf{b = 9}$ ។

ចំពោះ $\mathbf{b = 8}$ នោះ $\mathbf{a = 2}$ ហើយចំពោះ $\mathbf{b = 9}$ នោះ $\mathbf{a \in IN}$

ដូចនេះ $\mathbf{a = 2 , b = 9}$ ។

មេរៀនសង្ខេប

ពហុធា និង វិធីចែកពហុធា

១_ឯកធា និង ពហុធា

ក_ឯកធា

-ឯកធា គឺជាកន្សោមដែលរបមាណវិធីលើអថេរមានតែវិធីគុណ និង ស្វ័យគុណដែលមាន និទស្សន្តគត់វិជ្ជមាន ឬ សូន្យ ។

-ឯកធាដូចគ្នា គឺជាឯកធាដែលមានផ្នែកអថេរដូចគ្នា ។

-ដឺក្រេនៃឯកធា ជាផលបូកនិទស្សន្តរបស់អថេរនីមួយៗនៃឯកធា ។

ខ_ពហុធា

-ពហុធា ជាផលបូកនៃច្រើនឯកធាខុសគ្នា ។

-ដឺក្រេនៃពហុធា គឺជាដឺក្រេរបស់តួដែរមានដឺក្រេខ្ពស់ជាងគេ ។

គ_ប្រមាណវិធីលើពហុធា

-ដើម្បីធ្វើ ផលបូក ឬ ដក នៃពហុធា ពីរ ឬច្រើន គេត្រូវបូក ឬ ដកឯកធាដែលដូចគ្នា ។

-ដើម្បីគុណពហុធា និង ពហុធា គេយកតួនីមួយៗនៃពហុធាទីមួយ គុណគ្រប់តួនៃពហុធា ទីពីរ រួចធ្វើប្រមាណវិធី (បង្រួម) ។

ឃ-រូបមន្ត

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
4. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
5. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
6. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
7. $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
8. $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
9. $acx^2 + (ad+bc)x + bd = (ax+b)(cx+d)$

២-ប្រមាណវិធីចែកពហុធា

ក-ទ្រឹស្តីវិធីចែកពហុធា

-ឧបមាថាគេមានពហុធាពីរ A និង B មានអថេរដូចគ្នា ហើយមានដឺក្រេ m និង n រៀងគ្នា ។ បើ $m \geq n$ គេអាចរកកន្សោមពីជគណិត Q និង R ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $A = B \times Q + R$ ។ ដឺក្រេនៃ R តូចជាងដឺក្រេនៃ B ។

Q ជាផលចែក ហើយ R ជាសំណល់នៅក្នុងវិធីចែក ។ ផលចែក Q មានដឺក្រេ $m-n$ ។

-បើ $R = 0$ គេបាន $A = B \times Q$ នោះគេថា A ចែកដាច់នឹង B ។

ខ_តួចែករួមធំបំផុត និង ពហុគុណរួមតូចបំផុត

-តួចែករួមធំបំផុតនៃកន្សោម **A** និង**B** គឺជាផលគុណកត្តារួមដែលមាននិទស្សន្តតូចជាងគេ

-ពហុគុណរួមតូចបំផុត គឺជាផលគុណគ្រប់កត្តាមិនរួម និង គ្រប់កត្តារួមដែលមាននិទស្សន្ត ធំជាងគេ ។

✱ វិធាន

♦ដើម្បីគណនាតួចែករួមធំបំផុត :

1. ដាក់ជាផលគុណកត្តាគ្រប់តួទាំងអស់ ។
2. ជ្រើសរើសយកតែកត្តារួម ដែលមាននិទស្សន្តតូចជាងគេ ។
3. តួចែករួមធំបំផុតជាផលគុណកត្តារួមទាំងនោះ ។

♦ដើម្បីគណនាតួចែករួមតូចបំផុត :

1. ដាក់ជាផលគុណកត្តាគ្រប់តួទាំងអស់ ។
2. ជ្រើសរើសយកកត្តាមិនរួម និង កត្តាដែលមាននិទស្សន្តធំជាងគេ ។
3. ពហុគុណរួមតូចបំផុតជាផលគុណកត្តាទាំងនោះ ។

គ_ប្រមាណវិធីបូក ដកកន្សោមប្រភាគ

1. $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{D}}+\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{D}}=\frac{\mathbf{A+B}}{\mathbf{D}}$
2. $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{D}}-\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{D}}=\frac{\mathbf{A-B}}{\mathbf{D}}$
3. $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{D}}+\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{D}}-\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{D}}=\frac{\mathbf{A+B-C}}{\mathbf{D}}$ ($\mathbf{D\neq 0}$)

✱ *វិធាន*

♦ដើម្បីគណនាផលបូក ឬ ដកប្រភាគ :

1. តម្រូវប្រភាគនីមួយៗឱ្យមានភាគបែងរួម ។

2. ធ្វើប្រមាណវិធី បូក ឬ ដកភាគយក ទុកភាគបែងរួម ។

3. សម្រួលលទ្ធផល ។

ឃ_ប្រមាណវិធីគុណ និង ប្រមាណវិធីចែក

1. $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}\times\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{D}}=\frac{\mathbf{A}\times\mathbf{C}}{\mathbf{B}\times\mathbf{D}}$

2. $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}\div\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{D}}=\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}\times\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{C}}=\frac{\mathbf{A}\times\mathbf{D}}{\mathbf{B}\times\mathbf{C}}$

($\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\neq \mathbf{0}$)

✱ *វិធាន*

♦ដើម្បីគណនាផលគុណ និង ផលចែកប្រភាគ :

1. ដាក់ភាគយក និង ភាគបែងជាផលគុណកត្តា ។

2. សម្រួលកន្សោមប្រភាគនីមួយៗ ។

3. ធ្វើប្រមាណវិធីគុណ ឬ ចែកតាមរូបមន្តគ្រឹះ ។

កម្រងលំហាត់ជ្រើសរើស

1. គណនាកន្សោម :

$$E=\frac{9x^2-6x+1}{5-x}\times\frac{5(x-2)-x(x-2)}{x^2-4x+4}\times\frac{1}{3x-1}$$

កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ x ដើម្បីឱ្យ E ជាចំនួនគត់ ។

2. គេឱ្យពហុធា $A(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ដែល $a , b , c\in Z$

ចូរកំណត់ a , b , c ដើម្បីឱ្យ $x=\sqrt{1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}}$ ជាឫសរបស់ $A(x)=0$ ។

3. ចូរបង្ហាញថា $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax-by)^2+(bx+ay)^2$

រួចទាញថា $|bx+ay|\le\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{x^2+y^2}$ គ្រប់ចំនួនពិត a , b , x, y ។

4. គេឱ្យ $x=\frac{a-b}{a+b}$, $y=\frac{b-c}{b+c}$, $z=\frac{c-a}{c+a}$

ចូរបង្ហាញថា $(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z)$

5. គេឱ្យពហុធា $f(x)=x^3-6x^2+9x+\lambda$

ក. កំណត់ចំនួនពិត λ ដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ចែកដាច់នឹង $x-4$ ។

ខ. ចំពោះតម្លៃ λ ដែលបានរកឃើញ ចូរដាក់ $f(x)$ ជាផលគុណកត្តា ។

គ. ចូរក x ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ជាការេប្រាកដ ។

6. គេឱ្យពហុធា $f(x)=x^3+px+q$

ក. កំណត់ p និង q ដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ចែកដាច់នឹង x^2-2x+1

ខ. ចំពោះតម្លៃ p និង q ដែលបានរកឃើញខាងលើ ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x

ដែលនាំឱ្យ $f(x)$ ជាការេប្រាកដ ។

7. គេឱ្យពហុធា $P(x)=2(x^2-3x+1)^7$

រកសំណល់នៃវិធីចែករវាង $P(x)$ នឹង x^2-4x+3 ។

8. គេមានពហុធា $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

គេដឹងថា $P(x)$ ចែកនឹង x ឱ្យសំណល់ 2 ហើយ $P(x)$ ចែកនឹង $x+1$ ឱ្យសំណល់ 1

ក. តើ $P(x)$ ចែកនឹង x^2+x ឱ្យសំណល់ប៉ុន្មាន ?

ខ. កំណត់ a , b , c , d ដោយដឹងថា $P(1)=P(2)=10$ ។

9.គេឱ្យពហុធា $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

គេដឹងថា $f(k)=k$ គ្រប់ $k=1\,,\,2\,,\,3\,,\,4$ និង $f(5)=77$ ។

ចូរកំនត់លេខមេគុណ a , b , c , d , e ។

10. គេដឹងថា $\dfrac{a}{k+1}+\dfrac{b}{k+2}+\dfrac{c}{k+3}+\dfrac{d}{k+4}=\dfrac{1}{k}$ ចំពោះ $k=1\,,\,2\,,\,3\,,\,4$ ។

ចូរគណនា $A=\dfrac{a}{6}+\dfrac{b}{7}+\dfrac{c}{8}+\dfrac{d}{9}$ ។

11. គេឱ្យពហុធា $A(x)=x^3+2x^2-38x+33$ និង $B(x)=x^2-6x+14$

ក. ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត α និង β ដើម្បីឱ្យ

$A(x)=(\alpha x+\beta)(x^2-6x+4)+B(x)-5$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

ខ. កំណត់តម្លៃ $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ ចំពោះ $x=\sqrt{14+6\sqrt{5}}$ ។

12. គេឱ្យពហុធា $\mathbf{P(x)=x^4-4x^3+ax+b}$ ។

កំណត់ចំនួនពិត $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ បើគេដឹងថា $\mathbf{P(x)}$ ចែកនឹង $\mathbf{x^2-4x+3}$ ឱ្យសំណល់ $\mathbf{4x-1}$ ។

លំហាត់ទី១

គណនាកន្សោម :

$$E=\frac{9x^2-6x+1}{5-x}\times\frac{5(x-2)-x(x-2)}{x^2-4x+4}\times\frac{1}{3x-1}$$

កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ **x** ដើម្បីឱ្យ **E** ជាចំនួនគត់ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាកន្សោម **E**

គេមាន $E=\frac{9x^2-6x+1}{5-x}\times\frac{5(x-2)-x(x-2)}{x^2-4x+4}\times\frac{1}{3x-1}$

$$=\frac{(3x-1)^2}{5-x}\times\frac{(x-2)(5-x)}{(x-2)^2}\times\frac{1}{3x-1}$$

$$=\frac{(3x-1)^2(x-2)(5-x)}{(5-x)(x-2)^2(3x-1)}=\frac{3x-1}{x-2}$$

ដូចនេះ $E=\frac{3x-1}{x-2}$ ដែល $x\neq\frac{1}{3}$, $x\neq 2$, $x\neq 5$ ។

កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ **x** :

គេមាន $E=\frac{3x-1}{x-2}=\frac{3(x-2)+5}{x-2}=3+\frac{5}{x-2}$

ដើម្បីឱ្យ **E** ជាចំនួនគត់លុះត្រាតែ $x-2$ ចែកដាច់ **5** ពោលគឺគេត្រូវឱ្យ $x=-3$, $x=1$

$x=3$, ឬ $x=7$ ។

ដូចនេះ $x\in\{-3,1,3,7\}$ ។

លំហាត់ទី២

គេឱ្យពហុធា $A(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ដែល a , b , $c \in Z$

ចូរកំណត់ a , b , c ដើម្បីឱ្យ $x=\sqrt{1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}}$ ជាឫសរបស់ $A(x)=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ a , b , c

គេមាន $x=\sqrt{1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}}$

$x=\sqrt{1+\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}}$

$x=\sqrt{(1+\sqrt[3]{2})^2}$

$x=1+\sqrt[3]{2}$

គេបាន $(x-1)^3=(\sqrt[3]{2})^3$

នាំឱ្យ $x^3-3x^2+3x-3=0$

ដូចនេះ $x=\sqrt{1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}}$ ជាឫស $x^3-3x^2+3x-3=0$ ។

ហេតុនេះ $x=\sqrt{1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}}$ ជាឫសរបស់ $A(x)=x^3+ax^2+bx+c=0$

លុះត្រាតែ $a=-3$, $b=3$, $c=-3$ ។

ដូចនេះ $a=-3$, $b=3$, $c=-3$ ជាចំនួនគត់ដែលត្រូវរក ។

លំហាត់ទី៣

ចូរបង្ហាញថា $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax-by)^2+(bx+ay)^2$

រួចទាញថា $|bx+ay|\le\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{x^2+y^2}$ គ្រប់ចំនួនពិត a , b , x, y ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax-by)^2+(bx+ay)^2$

តាង $A=(ax-by)^2+(bx+ay)^2$

$$=a^2x^2-2abxy+b^2y^2+b^2x^2+2abxy+a^2y^2$$

$$=a^2x^2+b^2y^2+b^2x^2+a^2y^2$$

$$=(a^2x^2+b^2x^2)+(a^2y^2+b^2y^2)$$

$$=x^2(a^2+b^2)+y^2(a^2+b^2)$$

$$=(a^2+b^2)(x^2+y^2)$$

ដូចនេះ $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax-by)^2+(bx+ay)^2$ ។

ទាញថា $|bx+ay|\le\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{x^2+y^2}$

ដោយ គ្រប់ចំនួនពិត a , b , x, y គេមាន $(ax-by)^2\ge 0$

តាម $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax-by)^2+(bx+ay)^2$

គេទាញបាន $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\ge(bx+ay)^2$

ដូចនេះ $|bx+ay|\le\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{x^2+y^2}$ ។

លំហាត់ទី៤

គេឱ្យ $x=\dfrac{a-b}{a+b}$, $y=\dfrac{b-c}{b+c}$, $z=\dfrac{c-a}{c+a}$

ចូរបង្ហាញថា $(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z)$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z)$

គេមាន $1+x=1+\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{2a}{a+b}$

$$1+y=1+\frac{b-c}{b+c}=\frac{2b}{b+c}$$

$$1+z=1+\frac{c-a}{c+a}=\frac{2c}{c+a}$$

គេបាន $(1+x)(1+y)(1+z)=\dfrac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ (1)

ហើយ $1-x=1-\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{2b}{a+b}$

$$1-y=1-\frac{b-c}{b+c}=\frac{2c}{b+c}$$

$$1-z=1-\frac{c-a}{c+a}=\frac{2a}{c+a}$$

គេបាន $(1-x)(1-y)(-z)=\dfrac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ (2)

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេទាញបាន :

$(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z)$ ពិត ។

លំហាត់ទី៥

គេឱ្យពហុធា $f(x)=x^3-6x^2+9x+\lambda$

ក. កំណត់ចំនួនពិត λ ដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ចែកដាច់នឹង $x-4$ ។

ខ. ចំពោះតម្លៃ λ ដែលបានរកឃើញ ចូរដាក់ $f(x)$ ជាផលគុណកត្តា ។

គ. ចូរក x ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ជាការេប្រាកដ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំណត់ចំនួនពិត λ

ដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ចែកដាច់នឹង $x-4$ លុះត្រាតែមានកន្សោមពីជគណិត $Q(x)$ មួយដែល

$f(x)=x^3-6x^2+9x+\lambda=(x-4)Q(x)$

យក $x=4$ គេបាន $f(4)=64-96+36+\lambda=0$

គេទាញបាន $\lambda=-4$ ។

ខ. ដាក់ $f(x)$ ជាផលគុណកត្តា

ចំពោះ $\lambda=-4$ គេបាន $f(x)=x^3-6x^2+9x-4$

ដោយ $f(x)$ ចែកដាច់នឹង $x-4$ នោះគេអាចសរសេរ :

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-4)(x^2+\alpha x+\beta)\\&=x^3+\alpha x^2+\beta x-4x^2-4\alpha x-4\beta\\&=x^3+(\alpha-4)x^2+(\beta-4\alpha)x-4\beta\end{aligned}$$

ដោយប្រៀបធៀបកន្សោមនេះជាមួយនឹង $f(x)=x^3-6x^2+9x-4$ គេបាន :

$$\begin{cases}\alpha - 4 = -6\\ \beta - 4\alpha = 9 \\ -4\beta = -4\end{cases}$$ នាំឱ្យ $\alpha = -2$, $\beta = 1$

គេបាន $f(x) = (x-4)(x^2 - 2x + 1)$

ដូចនេះ $f(x) = (x-4)(x-1)^2$ ។

គ.រក x ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ជាការេប្រាកដ

គេមាន $f(x) = (x-4)(x-1)^2$

ដោយ $(x-1)^2$ ជាការេប្រាកដគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $x > 1$ នោះដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ជាការេប្រាកដនោះគេគ្រាន់តែឱ្យ $x-4$ ជាការេប្រាកដ ។

គេបាន $x - 4 = p^2$ គ្រប់ $p \in IN = \{1 , 2 , 3 , ...\}$

ដូចនេះ $x = p^2 + 4$ ។

លំហាត់ទី៦

គេឱ្យពហុធា $f(x)=x^3+px+q$

ក. កំណត់ p និង q ដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ចែកដាច់នឹង x^2-2x+1

ខ. ចំពោះតម្លៃ p និង q ដែលបានរកឃើញខាងលើ ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x ដែលនាំឱ្យ $f(x)$ ជាការេប្រាកដ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំណត់ p និង q

ដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ចែកដាច់នឹង $x^2-2x+1=(x-1)^2$ លុះត្រាតែមានកន្សោមពីជគណិត $Q(x)$ មួយដែល $f(x)=(x-1)^2Q(x)$

ឬ $x^3+px+q=(x-1)^2Q(x)$ (1)

យក $x=1$ ជួសក្នុង (1) គេបាន : $1+p+q=0\Rightarrow q=-1-p$

គេបាន $f(x)=x^3+px-1-p$

$$=(x-1)(x^2+x+1)+p(x-1)$$

$$=(x-1)(x^2+x+1+p)$$

ដោយ $f(x)$ ចែកដាច់នឹង $(x-1)^2$ នោះគេបាន $x^2+x+1+p$ ត្រូវតែចែកដាច់នឹង $x-1$ ពោលគឺ $x=1$ ជាឫស $x^2+x+1+p=0$

គេបាន $1^2+1+1+p=0\Rightarrow p=-3$ ហើយ $q=-1-(-3)=2$

ដូចនេះ $p=-3$, $q=2$ ។

ខ. កំនត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x

ចំពោះ $p=-3$, $q=2$

គេបាន $f(x)=x^3-3x+2=(x-1)^2(x+\alpha)$

យក $x=0$ គេបាន $f(0)=2=\alpha$

ដូចនេះ $f(x)=(x-1)^2(x+2)$

ដោយកត្តា $(x-1)^2$ ជាការេប្រាកដគ្រប់ចំនួនគត់ $x>1$ ។

ហេតុនេះដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ជាការេប្រាកដលុះត្រាតែ $x+2$ ជាការេប្រាកដ ។

គេបាន $x+2=k^2$ $\forall k\geq 2$, $k\in IN$

ដូចនេះ $x=k^2-2$ ។

លំហាត់ទី៧

គេឱ្យពហុធា $P(x)=2(x^2-3x+1)^7$

រកសំណល់នៃវិធីចែករវាង $P(x)$ នឹង x^2-4x+3 ។

ដំណោះស្រាយ

រកសំណល់

តាង $R(x)=ax+b$ ជាសំណល់នៃវិធីចែករវាង $P(x)$ នឹង x^2-4x+3 នោះមាន

កន្សោមពីជគណិត $Q(x)$ ដែល $P(x)=(x^2-4x+3)Q(x)+R(x)$

ឬ $2(x^2-3x+1)^7=(x^2-4x+3)Q(x)+ax+b$

យើងដឹងថា $x^2-4x+3=0$ ពេលដែល $x=1$ ឬ $x=3$

បើ $x=1$ គេបាន $-2=a+b$ (1)

បើ $x=3$ គេបាន $2=3a+b$ (2)

យកសមីការ (2) ដកសមីការ (1) គេបាន $4=2a\Rightarrow a=2$

តាម (1) គេបាន $b=-2-a=-2-2=-4$

ដូចនេះ $a=2$, $b=-4$ និង $R(x)=-2x+4$ ។

លំហាត់ទី៨

គេមានពហុធា $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

គេដឹងថា $P(x)$ ចែកនឹង x ឱ្យសំណល់ 2 ហើយ $P(x)$ ចែកនឹង $x+1$ ឱ្យសំណល់ 1

ក. តើ $P(x)$ ចែកនឹង x^2+x ឱ្យសំណល់ប៉ុន្មាន ?

ខ. កំណត់ a , b , c , d ដោយដឹងថា $P(1)=P(2)=10$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. តើ $P(x)$ ចែកនឹង x^2+x ឱ្យសំណល់ប៉ុន្មាន ?

សម្មតិកម្ម $P(x)$ ចែកនឹង x ឱ្យសំណល់ 2 ហើយ $P(x)$ ចែកនឹង $x+1$ ឱ្យសំណល់ 1

នាំឱ្យមានកន្សោមពីជគណិត $Q_1(x)$ និង $Q_2(x)$ ដែល :

$P(x)=xQ_1(x)+2$ ឬ $\dfrac{P(x)}{x}=Q_1(x)+\dfrac{2}{x}$ (1)

$P(x)=(x+1)Q_2(x)+1$ ឬ $\dfrac{P(x)}{x+1}=Q_2(x)+\dfrac{1}{x+1}$ (2)

ដកសមីការ (1) និង (2) គេបាន $\dfrac{P(x)}{x}-\dfrac{P(x)}{x+1}=Q_1(x)-Q_2(x)+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x+1}$

ឬ $\dfrac{(x+1)-x}{x(x+1)}P(x)=Q_1(x)-Q_2(x)+\dfrac{x+2}{x(x+1)}$

ឬ $P(x)=[Q_1(x)-Q_2(x)](x^2+x)+x+2$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា $P(x)$ ចែកនឹង x^2+x ឱ្យសំណល់ $R(x)=x+2$ ។

ខ. កំណត់ a , b, c , d

តាមសម្រាយខាងលើ $P(x)$ ចែកនឹង x^2+x ឱ្យសំណល់ $R(x)=x+2$ នាំឱ្យមាន

កន្សោមពីជគណិត $Q(x)=\alpha x+\beta$ ដែល $P(x)=(x^2+x)(\alpha x+\beta)+x+2$

ដោយដឹងថា $P(1)=P(2)=10$ នោះ $\begin{cases} 2(\alpha+\beta)+3=10 \\ 6(2\alpha+\beta)+4=10 \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} \alpha+\beta=\dfrac{7}{2} \\ 2\alpha+\beta=1 \end{cases}$ នាំឱ្យ $\alpha=-\dfrac{5}{2}$ និង $\beta=6$

គេបាន $P(x)=(x^2+x)(-\dfrac{5x}{2}+6)+x+2$

$$P(x)=-\frac{5x^3}{2}+6x^2-\frac{5x^2}{2}+6x+x+2$$

$$P(x)=-\frac{5}{2}x^3+\frac{7}{2}x^2+7x+2$$

ដោយ $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

ដូចនេះ $a=-\dfrac{5}{2}\,,\ b=\dfrac{7}{2}\,,\ c=7,\ d=2$ ។

លំហាត់ទី៩

គេឱ្យពហុធា $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

គេដឹងថា $f(k)=k$ គ្រប់ $k=1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4$ និង $f(5)=77$ ។

ចូរកំនត់លេខមេគុណ $a\ ,\ b\ ,\ c\ ,\ d\ ,\ e$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់លេខមេគុណ $a\ ,\ b\ ,\ c\ ,\ d\ ,\ e$

តាងពហុធា $g(x)=f(x)-x$ ដោយ $f(k)=k$ គ្រប់ $k=1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4$

នោះគេបាន $g(1)=g(2)=g(3)=g(4)=0$

ហេតុនេះ $g(x)=\lambda(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

គេបាន $f(x)-x=\lambda(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

ឬ $f(x)=\lambda(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+x$

បើ $x=5$ នោះ $f(5)=24\lambda+5$ តែ $f(5)=77$

គេបាន $24\lambda+5=77\Rightarrow\lambda=3$

ដូចនេះ $f(x)=3(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+x$

ឬ $f(x)=3x^4-30x^3+105x^2-149x+72$

ដោយ $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

ដូចនេះ $a=3\ ,\ b=-30\ ,\ c=105\ ,\ d=-149\ ,\ e=72$ ។

លំហាត់ទី១០

គេដឹងថា $\frac{a}{k+1}+\frac{b}{k+2}+\frac{c}{k+3}+\frac{d}{k+4}=\frac{1}{k}$ ចំពោះ $k=1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4$ ។

ចូរគណនា $A=\frac{a}{6}+\frac{b}{7}+\frac{c}{8}+\frac{d}{9}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $A=\frac{a}{6}+\frac{b}{7}+\frac{c}{8}+\frac{d}{9}$

តាងពហុធា :

$$P(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}+\frac{c}{x+3}+\frac{d}{x+4}-\frac{1}{x})\ \ (1)$$

គេមាន $\frac{a}{k+1}+\frac{b}{k+2}+\frac{c}{k+3}+\frac{d}{k+4}=\frac{1}{k}$ ចំពោះ $k=1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4$

ហេតុនេះ $P(1)=P(2)=P(3)=P(4)=0$ ។

ដោយ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបួននៃ x នោះនាំឱ្យមានចំនួនពិត $\lambda\neq 0$ ដែល

$$P(x)=\lambda(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\ \ (2)$$

តាម (1) គេអាចសរសេរ :

$$P(x)=x(x+1)...(x+4)(\frac{a}{x+1}+...+\frac{d}{x+4})-(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$

បើ $x=0\Rightarrow P(0)=-24$ តែតាម (2) $P(0)=24\lambda$

គេទាញបាន $24\lambda=-24\Rightarrow\lambda=-1$

ហេតុនេះ $P(x)=-(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\ (3)$

យក $\mathbf{x=5}$ ជួសក្នុង **(1)** គេបាន **:**

$$\mathbf{P(5)=5.6.7.8.9\left(\frac{a}{6}+\frac{b}{7}+\frac{c}{8}+\frac{d}{9}-\frac{1}{5}\right)}$$ និង $\mathbf{P(5)=-24}$

គេបាន $\mathbf{5.6.7.8.9(\frac{a}{6}+\frac{b}{7}+\frac{c}{8}+\frac{d}{9}-\frac{1}{5})=-24}$

គេទាញ $\mathbf{\frac{a}{6}+\frac{b}{7}+\frac{c}{8}+\frac{d}{9}=-\frac{1}{630}+\frac{1}{5}=\frac{125}{630}=\frac{25}{126}}$

ដូចនេះ $\mathbf{A=\frac{a}{6}+\frac{b}{7}+\frac{c}{8}+\frac{d}{9}=\frac{25}{126}}$ ។

លំហាត់ទី១១

គេឱ្យពហុធា $\mathbf{A(x)=x^3+2x^2-38x+33}$ និង $\mathbf{B(x)=x^2-6x+14}$

ក. ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត α និង β ដើម្បីឱ្យ

$\mathbf{A(x)=(\alpha x+\beta)(x^2-6x+4)+B(x)-5}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\mathbf{x}$ ។

ខ. កំណត់តម្លៃ $\mathbf{\dfrac{A(x)}{B(x)}}$ ចំពោះ $\mathbf{x=\sqrt{14+6\sqrt{5}}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.កំណត់ពីរចំនួនពិត α និង β

ដោយ $\mathbf{A(x)=(\alpha x+\beta)(x^2-6x+4)+B(x)-5}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\mathbf{x}$ នោះ

គេអាចយក $\mathbf{x=0}$ និង $\mathbf{x=1}$ គេបាន $\begin{cases}\mathbf{A(0)=4\beta+B(0)-5}\\ \mathbf{A(1)=-(\alpha+\beta)+B(1)-5}\end{cases}$

$\mathbf{A(0)=33\ ,\ B(0)=14}$ និង $\mathbf{A(1)=1+1-38+33=-3\ ,\ B(1)=1-6+14=9}$

គេបាន $\begin{cases}\mathbf{33=4\beta+14-5}\\ \mathbf{-3=-\alpha-\beta+9-5}\end{cases}$ នាំឱ្យ $\mathbf{\beta=6\ ,\ \alpha=1}$

ដូចនេះ $\mathbf{\alpha=1\ ,\ \beta=6}$ ។

ខ. កំណត់តម្លៃ $\mathbf{\dfrac{A(x)}{B(x)}}$ ចំពោះ $\mathbf{x=\sqrt{14+6\sqrt{5}}}$

គេមាន $\mathbf{x=\sqrt{14+6\sqrt{5}}=\sqrt{(3+\sqrt{5})^2}=3+\sqrt{5}}$

ឬ $\mathbf{x-3=\sqrt{5}}$ នាំឱ្យ $\mathbf{(x-3)^2=5}$ ឬ $\mathbf{x^2-6x+4=0}$

គេមាន $\mathbf{A(x)=(x+6)(x^2-8x+4)+x^2-6x+14-5}$

ឬ $A(x)=(x+6)(x^2-6x+4)+(x^2-6x+4)+5$

ហើយ $B(x)=x^2-6x+14=(x^2-6x+4)+10$ ដោយ $x^2-6x+4=0$

នោះ $\dfrac{A(x)}{B(x)}=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី១២

គេឱ្យពហុធា $P(x)=x^4-4x^3+ax+b$ ។

កំណត់ចំនួនពិត a និង b បើគេដឹងថា $P(x)$ ចែកនឹង x^2-4x+3 ឱ្យសំណល់ $4x-1$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនពិត a និង b

តាង $Q(x)$ ជាផលចែករវាង $P(x)$ នឹង x^2-4x+3

គេបានសមីការ $x^4-4x^3+ax+b=(x^2-4x+3)Q(x)+4x-1$

យើងដឹងថា $x^2-4x+3=0 \Rightarrow x_1=1$, $x_2=3$

ហេតុនេះបើ $x=1$ គេបាន $1-4+a+b=4-1$ ឬ $a+b=6$ (1)

បើ $x=3$ គេបាន $3^4-4.3^3+3a+b=12-1$ ឬ $3a+b=38$ (2)

ដកសមីការ (1) និង (2) អង្គ និង អង្គគេបាន $-2a=-32 \Rightarrow a=16$

ហើយតាម (1) គេបាន $b=6-a=6-16=-10$ ។

ដូចនេះ $a=16$, $b=-10$ ។

មេរៀនសង្ខេប

ចំនួនកុំផ្លិច

១_សមីការដឺក្រេទីពីរមានមួយអញ្ញាត

ក_និយមន័យ

សមីការដែលមានរាងទូទៅ $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$ ហៅថាសមីការដឺក្រេទីពីរមានមួយអញ្ញាត ដែល $\mathbf{x}$ ជាអញ្ញាត ហើយលេខមេគុណ $\mathbf{a,b,c}$ ជាចំនួនថេរ និង $\mathbf{a\neq 0}$ ។

ខ_ដំណោះស្រាយសមីការដឺក្រេទីពីរ

សន្មតថាគេមានសមីការ $\mathbf{ax^2+bx+c=0\ \ ,\ a\neq 0}$

ឌីសគ្រីមីណង់សមីការ $\mathbf{\Delta=b^2-4ac}$

-បើ $\mathbf{\Delta>0}$ សមីការមានឬសពីរជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នាគឺ :

$$\mathbf{x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\ \ ;\ \ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

-បើ $\mathbf{\Delta=0}$ សមីការមានឬសឌុប $\mathbf{x_1=x_2=-\frac{b}{2a}}$

-បើ $\mathbf{\Delta<0}$ សមីការមានឬសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា :

$$\mathbf{x_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\ \ ;\ \ x_2=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}}$$

គ_ទំនាក់ទំនងឫស និង លេខមេគុណ

បើ α និង β ជាឫសរបស់សមីការ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ នោះគេមាន :

-ផលបូកឫស $S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

-ផលគុណឫស $P=\alpha.\beta=\frac{c}{a}$

ឃ_មុខងារណនាឫសនៃសមីការដឺក្រេទីពីរខ្លះ

ឧបមាថាគេមានសមីការដឺក្រេទីពីរ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$

-បើ $a+b+c=0$ សមីការមានឫស $x_1=1$; $x_2=\frac{c}{a}$

-បើ $b=a+c$ សមីការមានឫស $x_1=-1$, $x_2=-\frac{c}{a}$

ង_របមន្តដាក់ជាផលគុណកត្តា

បើ α និង β ជាឫសរបស់សមីការ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ នោះគេបាន :

$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ ។

ច_បង្កើតសមីការដឺក្រេទីពីរ

បើគេដឹងផលបូក $\alpha+\beta=S$ និង ផលគុណ $\alpha\beta=P$ នោះ α និង β ជាឫសសមីការ ដឺក្រេទីពីរ $x^2-Sx+P=0$ ។

២_វិសមភាព

ក_លក្ខណៈវិសមភាព

1. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ បើ $\mathbf{a > b}$ នោះគេបាន $\mathbf{a + c > b + c}$

ឬ $\mathbf{a - c > b - c}$ ។

2. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ គេមាន ៖

-បើ $\mathbf{a > b}$ និង $\mathbf{c > 0}$ នោះ $\mathbf{ac > bc}$

-បើ $\mathbf{a > b}$ និង $\mathbf{c < 0}$ នោះ $\mathbf{ac < bc}$

ខ_វិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត និង មធ្យមធរណីមាត្រ

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\mathbf{a \geq 0}$ និង $\mathbf{b \geq 0}$ គេមាន ៖

$$\frac{\mathbf{a+b}}{\mathbf{2}} \geq \sqrt{\mathbf{ab}}$$ ។

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពលុះត្រាតែ $\mathbf{a = b}$ ។

៣_វិសមីការតម្លៃដាច់ខាត

បើ $\alpha > \mathbf{0}$ នោះគេបាន ៖

1. $|\mathbf{ax+b}| < \alpha \Leftrightarrow \mathbf{ax+b} < \alpha$ និង $\mathbf{ax+b} > -\alpha$

2. $|\mathbf{ax+b}| > \alpha \Leftrightarrow \mathbf{ax+b} > \alpha$ ឬ $\mathbf{ax+b} < -\alpha$

3. $|\mathbf{ax+b}| = \alpha \Leftrightarrow \mathbf{ax+b} = \pm\alpha$

៤_សញ្ញារបស់ទ្វេធាដឺក្រេទីមួយ

ចំពោះទ្វេធា $\mathbf{f(x)=ax+b}$ មាន $\mathbf{x=-\frac{b}{a}}$ ជាឬស គេកំណត់សញ្ញាទ្វេធានេះ ទៅតាមសញ្ញារបស់ **a** ដូចតារាងខាងក្រោម :

$\mathbf{x}$	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$\mathbf{f(x)=ax+b}$		*សញ្ញាផ្ទុយពី* **a**	0	*សញ្ញាដូច* **a**	

៥_សញ្ញារបស់ត្រីធាដឺក្រេទីពីរ

ចំពោះត្រីធា $\mathbf{f(x)=ax^2+bx+c}$ មានឬសពីរ α និង β ដែល $\alpha<\beta$ ។

$\mathbf{x}$	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$\mathbf{f(x)=ax^2+bx+c}$		*សញ្ញាដូច* **a**	0	*សញ្ញាផ្ទុយពី* **a**	0	*សញ្ញាដូច* **a**	

៦_ចម្លើយវិសមីការដឺក្រេទីពីរ

_ករណី $\Delta>0$ **និង** $\mathbf{a>0}$ **មានឬស** α,β $(\alpha<\beta)$

ក. $\mathbf{ax^2+bx+c>0}$ មានចម្លើយ $\mathbf{x<\alpha}$, $\mathbf{x>\beta}$ ។

ខ. $\mathbf{ax^2+bx+c<0}$ មានចម្លើយ $\alpha<\mathbf{x}<\beta$ ។

គ. $\mathbf{ax^2+bx+c\ge 0}$ មានចម្លើយ $\mathbf{x\le\alpha}$, $\mathbf{x\ge\beta}$ ។

ឃ. $\mathbf{ax^2+bx+c\le 0}$ មានចម្លើយ $\alpha\le\mathbf{x}\le\beta$ ។

-ករណី $\Delta = 0$ និង $a > 0$ មានឫសឌុប

ក. $\mathbf{ax^2 + bx + c > 0}$ មានចម្លើយគ្រប់ចំនួនពិតលើកលែងតែ $\mathbf{x = -\frac{b}{2a}}$

ខ. $\mathbf{ax^2 + bx + c < 0}$ គ្មានចម្លើយ ។

គ. $\mathbf{ax^2 + bx + c \geq 0}$ មានចម្លើយគ្រប់ចំនួនពិតទាំងអស់ ។

ឃ. $\mathbf{ax^2 + bx + c \leq 0}$ មានចម្លើយ $\mathbf{x = -\frac{b}{2a}}$ ។

-ករណី $\Delta < 0$ និង $a > 0$ មានឫសជាចំនួនកុំផ្លិច

ក. $\mathbf{ax^2 + bx + c > 0}$ មានចម្លើយគ្រប់ចំនួនពិតទាំងអស់ ។

ខ. $\mathbf{ax^2 + bx + c < 0}$ គ្មានចម្លើយ ។

គ. $\mathbf{ax^2 + bx + c \geq 0}$ មានចម្លើយគ្រប់ចំនួនពិតទាំងអស់ ។

ឃ. $\mathbf{ax^2 + bx + c \leq 0}$ គ្មានចម្លើយ ។

រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន
Tel : (017) 768 246

កម្រងលំហាត់ជ្រើសរើស

1. គេមានសមីការ $x^2-2x-1=0$ មានឫសពីរគឺ α និង β ។

ចូរគណនា $A=\alpha^4+6\beta^2$ ។

2. គេឱ្យសមីការ $x^2-x-1=0$ មានឫសពីរគឺ α និង β ។

ចូរគណនា $A=\alpha^5+2\beta^3+\beta$

3. គេឱ្យសមីការ $(E): x^2-2(m+1)x+4m-9=0$

ក. បង្ហាញថា (E) មានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិតជានិច្ចគ្រប់តម្លៃ m ។

ខ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យ ${x_1}^2+{x_2}^2=2(x_1+x_2)+17$ ដែល x_1, x_2 ជាឫស ។

4. គេឱ្យសមីការ $(E_1): x^2+px+q=0$ និង $(E_2): x^2+p'x+q'=0$

ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង p , q , p' , q' ដើម្បីឱ្យ (E_1) និង (E_2) មានឫសរួមមួយ ។

5. គេឱ្យសមីការ $(E_1): x^2+px+q=0$ និង $(E_2): x^2+p'x+q'=0$

ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង p , q , p' , q' ដើម្បីឱ្យ (E_1) និង (E_2) មានឫសរួមមួយ ។

6. គេឱ្យ $a\ge 0$, $b\ge 0$, $c\ge 0$ ។

ក.ចូរស្រាយថា $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ និង $c+\frac{a+b+c}{3}\ge 2\sqrt{c.\frac{a+b+c}{3}}$

ខ. ដោយប្រើវិសមភាពខាងលើនេះចូរស្រាយថា $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$

7. គេឱ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរស្រាយថា $(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)$

8. គេឱ្យ $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ជាចំនួនវិជ្ជមាន និង $\mathbf{a+b=1}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\mathbf{\sqrt{ax+by} \geq a\sqrt{x}+b\sqrt{y}}$ ។

9.គេឱ្យ $\mathbf{a, b, c > 0}$ ដែល $\mathbf{abc \geq 1}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\mathbf{(1+\frac{a^2}{1+a})(1+\frac{b^2}{1+b})(1+\frac{c^2}{1+c}) \geq \frac{27}{8}}$

10. គេឱ្យ $\mathbf{a, b, c}$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\mathbf{\frac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3} \geq \frac{10}{9}(a+b+c)^2}$$

11. គេឱ្យ $\mathbf{a, b, c, d}$ ជាបីចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមភាព :

$$\mathbf{(a^2+b^2-1)(c^2+d^2-1) > (ac+bd-1)^2}$$

ចូរបង្ហាញថា $\mathbf{a^2+b^2 > 1}$ និង $\mathbf{c^2+d^2 > 1}$ ។

12. គេឱ្យ $\mathbf{x, y, z > 0}$ ដែល $\mathbf{x+y+z=1}$ ។

ចូរស្រាយថា $\mathbf{\frac{x^3}{(1-x)^2}+\frac{y^3}{(1-y)^2}+\frac{z^3}{(1-z)^2} \geq \frac{1}{4}}$

13. គេមានសមីការ $\mathbf{(E): \ x^2+px+q=0}$

បើ $\mathbf{x=\sqrt[3]{\alpha}}$ ជាឫសរបស់សមីការ $\mathbf{(E)}$ នោះចូរស្រាយថាគេមានទំនាក់ទំនង

$\mathbf{\alpha^2+(p^3-3pq)\alpha+q^3=0}$ ។

14. ដោះស្រាយសមីការ

$$\frac{x^2-3x+2(1+\sqrt{3})}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\sqrt{x^2-3x+2}$$

15. ដោះស្រាយសមីការ

$$x^2-x+6=\sqrt{x^3+8}$$

✍✍✍✍✍

លំហាត់ទី១

គេមានសមីការ $x^2-2x-1=0$ មានឫសតាងដោយ α និង β ។

ចូរគណនា $A=\alpha^4+6\beta^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $A=\alpha^4+6\beta^2$

ដោយ α និង β ជាឫស $x^2-2x-1=0$ នោះគេបាន $\begin{cases}\alpha^2-2\alpha-1=0 & (1)\\ \beta^2-2\beta-1=0 & (2)\end{cases}$

តាម (1) គេទាញ $\alpha^2=2\alpha+1$

លើកជាការេគេបាន $\alpha^4=(2\alpha+1)^2$

$$\alpha^4=4\alpha^2+4\alpha+1$$
$$\alpha^4=4(2\alpha+1)+4\alpha+1$$
$$\alpha^4=12\alpha+5$$

តាម (2) គេទាញ $\beta^2=2\beta+1$

គេបាន $A=\alpha^4+6\beta^2$

$$=12\alpha+5+6(2\beta+1)$$
$$=12(\alpha+\beta)+11$$

ដោយ $\alpha+\beta=2$ នោះ $A=12(2)+11=35$

ដូចនេះ $A=35$ ។

លំហាត់ទី២

គេឱ្យសមីការ $x^2 - x - 1 = 0$ មានឫសពោងដោយ α និង β ។

ចូរគណនា $A = \alpha^5 + 2\beta^3 + \beta$

ដំណោះស្រាយ

គណនា $A = \alpha^5 + 2\beta^3 + 3\beta$

ដោយ α និង β ជាឫសនៃ $x^2 - x - 1 = 0$ នោះគេបាន $\begin{cases} \alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \\ \beta^2 - \beta - 1 = 0 \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} \alpha^2 = \alpha + 1 \\ \beta^2 = \beta + 1 \end{cases}$

គេមាន $A = \alpha^5 + 2\beta^3 + \beta$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha(\alpha^2)^2 + 2\beta.\beta^2 + \beta \\
&= \alpha(\alpha+1)^2 + 2\beta(\beta+1) + \beta \\
&= \alpha(\alpha^2 + 2\alpha + 1) + 2\beta^2 + 2\beta + \beta \\
&= \alpha(\alpha + 1 + 2\alpha + 1) + 2(\beta+1) + 3\beta \\
&= \alpha(3\alpha + 2) + 5\beta + 2 \\
&= 3\alpha^2 + 2\alpha + 5\beta + 2 \\
&= 3(\alpha+1) + 2\alpha + 5\beta + 2 \\
&= 5(\alpha+\beta) + 2
\end{aligned}
$$

ដោយ $\alpha + \beta = 1$ នោះ $A = 5 + 2 = 7$

ដូចនេះ $A = 7$ ។

លំហាត់ទី៣

គេឱ្យសមីការ $(E): x^2-2(m+1)x+4m-9=0$

ក. បង្ហាញថា (E) មានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិតជានិច្ចគ្រប់តម្លៃ m ។

ខ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យ $x_1^2+x_2^2=2(x_1+x_2)+17$ ដែល x_1, x_2 ជាឫស ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (E) មានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិតជានិច្ចគ្រប់តម្លៃ m

ឌីសគ្រីមីណង់បង្រួមនៃសមីការគឺ :

$$\Delta' = (m+1)^2-(4m-9)$$

$$= m^2+2m+1-4m+9=(m-1)^2+9>0 \ \forall m\in IR$$

ដូចនេះ (E) មានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិតជានិច្ចគ្រប់តម្លៃ m ។

ខ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យ $x_1^2+x_2^2=2(x_1+x_2)+18$

ដោយ x_1, x_2 ជាឫសនោះ $\begin{cases} x_1+x_2=2(m+1) & (1) \\ x_1x_2=4m-9 & (2) \end{cases}$

គេមាន $x_1^2+x_2^2=2(x_1+x_2)+17$

$$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=2(x_1+x_2)+17 \quad (3)$$

យកសមីការ $(1)\,\&\,(2)$ ជំនួសក្នុង (3) គេបាន :

$$4(m+1)^2-2(4m-9)=4(m+1)+17$$

$$4m^2-4m+1=0$$

$$(2m-1)^2=0 \Rightarrow m=\frac{1}{2}$$

លំហាត់ទី៤

គេឱ្យសមីការ $(E_1): x^2+px+q=0$ និង $(E_2): x^2+p'x+q'=0$

ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង p , q , p' , q' ដើម្បីឱ្យ (E_1) និង (E_2) មានឫសរួមមួយ ។

ដំណោះស្រាយ

រកទំនាក់ទំនងរវាង p , q , p' , q'

តាង α ជាឫសរួមរបស់សមីការ (E_1) និង (E_2) នោះគេបាន :

$$\begin{cases}\alpha^2+p\alpha+q=0 & (1)\\ \alpha^2+p'\alpha+q'=0 & (2)\end{cases}$$

ដកសមីការ $(1)\,\&\,(2)$ គេបាន : $(p-p')\alpha+(q-q')=0$

គេទាញ $\alpha=-\dfrac{q-q'}{p-p'}$ យកជំនួសក្នុងសមីការ (1) គេបាន :

$$\left(-\frac{q-q'}{p-p'}\right)^2+p\left(-\frac{q-q'}{p-p'}\right)+q=0$$

$$(q-q')^2-p(p-p')(q-q')+q(p-p')^2=0$$

$$(q-q')^2-(p-p')[p(q-q')-q(p-p')]=0$$

$$(q-q')^2-(p-p')(p'q-pq')=0$$

ដូចនេះ $(q-q')^2=(p-p')(p'q-pq')$ ។

លំហាត់ទី៥

គេឱ្យសមីការ $(E_1): x^2+px+q=0$ និង $(E_2): x^2+p'x+q'=0$

ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង p , q , p' , q' ដើម្បីឱ្យ (E_1) និង (E_2) មានឫសរួមមួយ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$

តាមមធ្យមនព្វន្ត និង មធ្យមធរណីមាត្រគេមាន :

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\;\Rightarrow a+b\geq 2\sqrt{ab}\quad (1)$$

ដូចគ្នាដែរគេបាន $b+c\geq 2\sqrt{bc}$ (2) និង $c+a\geq 2\sqrt{ac}$ (3)

ធ្វើវិធីគុណវិសមភាព (1) , (2) & (3) អង្គនិងអង្គគេបាន :

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 2\sqrt{ab}.2\sqrt{bc}.2\sqrt{ac}$$

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8\sqrt{a^2b^2c^2}=8abc$$

ដូចនេះ $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$ ។

លំហាត់ទី៦

គេឱ្យ $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$ ។

ក.ចូរស្រាយថា $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ និង $c+\frac{a+b+c}{3} \geq 2\sqrt{c.\frac{a+b+c}{3}}$

ខ. ដោយប្រើវិសមភាពខាងលើនេះចូរស្រាយថា $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថា $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ និង $c+\frac{a+b+c}{3} \geq 2\sqrt{c.\frac{a+b+c}{3}}$

ឧបមាថា $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ពិត

គេបាន $a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$

$$(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}.\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \geq 0$$

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ។

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $c+\frac{a+b+c}{3} \geq 2\sqrt{c.\frac{a+b+c}{3}}$ ។

ខ.ស្រាយថា $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

គេមាន $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ (1)

$$c+\frac{a+b+c}{3} \geq 2\sqrt{c.\frac{a+b+c}{3}} \quad (2)$$

បូកវិសមភាព (1) & (2) អង្គ និង អង្គគេបាន :

$$a+b+c+\frac{a+b+c}{3} \geq 2(\sqrt{ab}+\sqrt{c.\frac{a+b+c}{3}})$$

$$\frac{4}{3}(a+b+c) \geq 2(\sqrt{ab}+\sqrt{c.\frac{a+b+c}{3}}) \quad (3)$$

ដោយ $\sqrt{ab}+\sqrt{c.\frac{a+b+c}{3}} \geq 2\sqrt{\sqrt{ab}.\sqrt{c.\frac{a+b+c}{3}}} = 2\sqrt[4]{abc.\frac{a+b+c}{3}}$ **(4)**

តាម **(3) & (4)** គេបាន :

$$\frac{4}{3}(a+b+c) \geq 4\sqrt[4]{abc.\frac{a+b+c}{3}}$$

$$a+b+c \geq 3\sqrt[4]{abc.\frac{a+b+c}{3}}$$

លើកអង្គទាំងពីរជាស្វ័យគុណ **4** គេបាន :

$$(a+b+c)^4 \geq 81.abc.\frac{a+b+c}{3}$$

$$(a+b+c)^3 \geq 27abc$$

ដូចនេះ $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ ។

លំហាត់ទី៧

គេឱ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរស្រាយថា $(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$

តាមវិសមភាព មធ្យមនព្វន្ត និង មធ្យមធរណីមាត្រគេមាន :

$$\frac{a^2b^2+b^2c^2}{2} \geq ab^2c \quad (1)$$

$$\frac{b^2c^2+c^2a^2}{2} \geq abc^2 \quad (2)$$

$$\frac{a^2b^2+c^2a^2}{2} \geq a^2bc \quad (3)$$

បូកវិសមភាពទាំងនេះអង្គនិងអង្គគេបាន :

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq ab^2c+abc^2+a^2bc \quad (4)$$

មាន $(ab+bc+ca)^2 = a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2(a^2bc+abc^2+a^2bc)$

ឬ $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 = (ab+bc+ca)^2-2(ab^2c+abc^2+a^2bc)$

វិសមភាព (4) អាចសរសេរ :

$$(ab+bc+ca)^2-2(ab^2c+abc^2+a^2bc) \geq a^2bc+ab^2c+abc^2$$

$$(ab+bc+ca)^2 \geq 3(a^2bc+ab^2c+abc^2)$$

ដូចនេះ $(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$ ។

លំហាត់ទី៨

គេឱ្យ a , b , x , y ជាចំនួនវិជ្ជមាន និង $a+b=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{ax+by} \geq a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\sqrt{ax+by} \geq a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$

ឧបមាថា $\sqrt{ax+by} \geq a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$ ពិត

សមមូល $ax+by \geq (a\sqrt{x}+b\sqrt{y})^2$

$$ax+by \geq a^2x+2ab\sqrt{xy}+b^2y \quad (1)$$

ដោយ $a+b=1$ នោះ វិសមភាព (1) អាចសរសេរ :

$$(ax+by)(a+b) \geq a^2x+2ab\sqrt{xy}+b^2y$$

$$a^2x+abx+aby+b^2y \geq a^2x+2ab\sqrt{xy}+b^2y$$

$$abx+aby-2ab\sqrt{xy} \geq 0$$

$$ab(x+y-2\sqrt{xy}) \geq 0$$

$$ab(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$$ ពិត

ដូចនេះ $\sqrt{ax+by} \geq a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$ ។

លំហាត់ទី៩

គេឱ្យ $a , b , c > 0$ ដែល $abc \ge 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $(1+\frac{a^2}{1+a})(1+\frac{b^2}{1+b})(1+\frac{c^2}{1+c}) \ge \frac{27}{8}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $(1+\frac{a^2}{1+a})(1+\frac{b^2}{1+b})(1+\frac{c^2}{1+c}) \ge \frac{27}{8}$

គេមាន $a^2+1 \ge 2a$ គ្រប់ $a>0$

គេបាន $4a^2+4a+4 \ge 3a^2+6a+3 = 3(a+1)^2$

គេទាញ $a^2+a+1 \ge \frac{3(a+1)^2}{4}$

ឬ $\frac{a^2+a+1}{a+1} \ge \frac{3(a+1)}{4}$

ឬ $1+\frac{a^2}{1+a} \ge \frac{3\sqrt{a}}{2}$ ព្រោះ $a+1 \ge 2\sqrt{a}$

ដូចគ្នាដែរ $1+\frac{b^2}{1+b} \ge \frac{3\sqrt{b}}{2}$ និង $1+\frac{c^2}{1+c} \ge \frac{3\sqrt{c}}{2}$

គេបាន$(1+\frac{a^2}{1+a})(1+\frac{b^2}{1+b})(1+\frac{c^2}{1+c}) \ge \frac{27\sqrt{abc}}{8}$

ដោយសម្មតិកម្ម $abc \ge 1$ នោះ $\frac{27\sqrt{abc}}{8} \ge \frac{27}{8}$

ដូចនេះ $(1+\frac{a^2}{1+a})(1+\frac{b^2}{1+b})(1+\frac{c^2}{1+c}) \ge \frac{27}{8}$ ។

លំហាត់ទី១០

គេឱ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3} \ge \frac{10}{9}(a+b+c)^2$$

ដំណោះស្រាយ

គេមានសមភាព :

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$a^5+b^5+c^5=(a+b+c)^5-5(a+b)(b+c)(c+a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$$

$$\frac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3}=\frac{5}{3}(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$$

យើងនឹងស្រាយថា $\frac{5}{3}(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca) \ge \frac{10}{9}(a+b+c)^2$

ឬ $3(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca) \ge 2(a+b+c)^2$

ឬ $$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$$

តាមវិសមភាព មធ្យមនព្វន្ត និង មធ្យមធរណីមាត្រគេមាន :

$\frac{a^2+b^2}{2} \ge ab$, $\frac{b^2+c^2}{2} \ge bc$, $\frac{c^2+a^2}{2} \ge ac$

នោះ $ab+bc+ca \le \frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2}=a^2+b^2+c^2$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3} \ge \frac{10}{9}(a+b+c)^2$ ។

លំហាត់ទី១១

គេឱ្យ a, b, c, d ជាបីចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមភាព :

$$(a^2+b^2-1)(c^2+d^2-1)>(ac+bd-1)^2$$

ចូរបង្ហាញថា $a^2+b^2>1$ និង $c^2+d^2>1$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $a^2+b^2>1$ និង $c^2+d^2>1$

តាង $x=1-a^2-b^2$ និង $y=1-c^2-d^2$

យើងឧបមាថា $x\geq 0$ និង $y\geq 0$

វិសមភាព $(a^2+b^2-1)(c^2+d^2-1)>(ac+bd-1)^2$

សមមូល $xy>(ac+bd-1)^2$

ឬ $4xy>(2ac+2bd-2)^2$

ដោយ $x+y=2-a^2-b^2-c^2-d^2$

នោះ $2ac+2bd-2=-a^2-b^2-c^2-d^2+2ac+2bd-x-y$

$$=-[(a-c)^2+(b-d)^2+x+y]$$

គេទាញ $4xy>[(a-c)^2+(b-d)^2+(x+y)]^2\geq(x+y)^2$

ឬ $4xy>x^2+2xy+y^2$

ឬ $(x-y)^2<0$ មិនពិត ។ នាំឱ្យការឧបមាខាងលើផ្ទុយពីការពិត ។

ដូចនេះគេទាញ $x<0$ និង $y<0$ នាំឱ្យ $a^2+b^2>1$ និង $c^2+d^2>1$ ។

លំហាត់ទី១២

គេឱ្យ $x , y , z > 0$ ដែល $x + y + z = 1$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{x^3}{(1-x)^2} + \frac{y^3}{(1-y)^2} + \frac{z^3}{(1-z)^2} \geq \frac{1}{4}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{x^3}{(1-x)^2} + \frac{y^3}{(1-y)^2} + \frac{z^3}{(1-z)^2} \geq \frac{1}{4}$

គេពិនិត្យ $\frac{x^3}{(1-x)^2} = \frac{(x - 2x^2 + x^3) + (2x^2 - x)}{(1-x)^2}$

$$= x + \frac{2x^2 - x}{(1-x)^2}$$

$$= x + \frac{(9x^2 - 6x + 1) - (1 - 2x + x^2)}{4(1-x)^2}$$

$$= x + \frac{(3x-1)^2 - (1-x)^2}{4(1-x)^2} = x - \frac{1}{4} + \frac{(3x-1)^2}{4(1-x)^2}$$

ដោយ $\frac{(3x-1)^2}{4(1-x)^2} \geq 0$ នោះ $\frac{x^3}{(1-x)^2} \geq x - \frac{1}{4}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\frac{y^3}{(1-y)^2} \geq y - \frac{1}{4}$ (2) និង $\frac{z^3}{(1-z)^2} \geq z - \frac{1}{4}$ (3)

បូកវិសមភាព (1) , (2) , (3) អង្គ និង អង្គគេបាន :

$$\frac{x^3}{(1-x)^2} + \frac{y^3}{(1-y)^2} + \frac{z^3}{(1-z)^2} \geq x + y + z - \frac{3}{4} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$ ពិត ។

លំហាត់ទី១៣

គេមានសមីការ (E): $x^2+px+q=0$

បើ $x=\sqrt[3]{\alpha}$ ជាឫសរបស់សមីការ (E) នោះចូរស្រាយថាគេមានទំនាក់ទំនង

$\alpha^2+(p^3-3pq)\alpha+q^3=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\alpha^2+(p^3-3pq)\alpha+q^3=0$

បើ $x=\sqrt[3]{\alpha}$ ជាឫសរបស់សមីការ (E) នោះគេបាន $\sqrt[3]{\alpha^2}+p\sqrt[3]{\alpha}+q=0$ ។

តាមសមភាព

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

បើគេយក $a=\sqrt[3]{\alpha^2}$, $b=p\sqrt[3]{\alpha}$, $c=q$ គេបាន :

$\alpha^2+p^3\alpha+q^3-3\alpha pq=0$ (ព្រោះ $\sqrt[3]{\alpha^2}+p\sqrt[3]{\alpha}+q=0$)

ដូចនេះ $\alpha^2+(p^3-3pq)\alpha+q^3=0$ ពិត ។

លំហាត់ទី១៤

ដោះស្រាយសមីការ

$$\frac{x^2-3x+2(1+\sqrt{3})}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\sqrt{x^2-3x+2}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ

$$\frac{x^2-3x+2(1+\sqrt{3})}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\sqrt{x^2-3x+2}$$

សមីការមានន័យលុះត្រាតែ $x^2-3x+2\geq 0$

នាំឱ្យ $x\leq 1$ ឬ $x\geq 2$ ។

តាង $t=\sqrt{x^2-3x+2}$ សមីការអាចសរសេរ :

$\frac{t^2+2\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=t$ ឬ $t^2-(\sqrt{6}+\sqrt{2})t+2\sqrt{3}=0$

$\Delta=(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-8\sqrt{3}=(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2$

គេទាញឫស $t_1=\sqrt{2}$, $t_2=\sqrt{6}$

-ចំពោះ $t=\sqrt{2}$ នោះ $\sqrt{x^2-3x+2}=\sqrt{2}$ ឬ $x^2-3x=0\Rightarrow x_1=0$, $x_2=3$

-ចំពោះ $t=\sqrt{6}$ នោះ $\sqrt{x^2-3x+2}=\sqrt{6}$ ឬ $x^2-3x-4=0\Rightarrow x_1=-1$, $x_2=4$

ដូចនេះ $x\in\{-1,0,3,4\}$ ។

លំហាត់ទី១៥

ដោះស្រាយសមីការ $x^2 - x + 6 = \sqrt{x^3 + 8}$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ

គេមាន $x^2 - x + 6 = \sqrt{x^3 + 8}$

$$x^2 - x + 6 = \sqrt{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}$$

សមីការមានន័យលុះត្រាតែ $(x+2)(x^2 - 2x + 4) \geq 0$

ដោយ $x^2 - 2x + 4 > 0$ ជានិច្ចគ្រប់ $x \in IR$ ពោះ $a = 1 > 0$, $\Delta = -12 < 0$

ហេតុនេះគេត្រូវឱ្យ $x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$ ។

តាង $u = x + 2$, $v = x^2 - 2x + 4$

សមីការអាចសរសេរ $u + v \geq 2\sqrt{uv} \Leftrightarrow (\sqrt{u} - \sqrt{v})^2 = 0$ ឬ $u = v$

គេបាន $x + 2 = x^2 - 2x + 4$

ឬ $-x^2 + 3x - 2 = 0$ ដោយ $a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a} = 2$

ដូចនេះ $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ ។

មេរៀនសង្ខេប

សមីការ និង វិសមីការ

១_សមីការដឺក្រេទីពីរមានមួយអញ្ញាត

ក_និយមន័យ

សមីការដែលមានរាងទូទៅ $ax^2+bx+c=0$ ហៅថាសមីការដឺក្រេទីពីរមានមួយអញ្ញាត ដែល x ជាអញ្ញាត ហើយលេខមេគុណ a,b,c ជាចំនួនថេរ និង $a\neq 0$ ។

ខ_ដំណោះស្រាយសមីការដឺក្រេទីពីរ

សន្មតថាគេមានសមីការ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$

ឌីសគ្រីមីណង់សមីការ $\Delta=b^2-4ac$

-បើ $\Delta>0$ សមីការមានឫសពីរជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នាគឺ :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\ ;\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

-បើ $\Delta=0$ សមីការមានឫសឌុប $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$

-បើ $\Delta<0$ សមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា :

$$x_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\ ;\ x_2=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

គ_ទំនាក់ទំនងឫស និង លេខមេគុណ

បើ α និង β ជាឫសរបស់សមីការ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ នោះគេមាន :

-ផលបូកឫស $S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

-ផលគុណឫស $P=\alpha.\beta=\frac{c}{a}$

ឃ_មុខងារឥណនាឫសនៃសមីការដឺក្រេទីពីររខាយ

ឧបមាថាគេមានសមីការដឺក្រេទីពីរ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$

-បើ $a+b+c=0$ សមីការមានឫស $x_1=1$; $x_2=\frac{c}{a}$

-បើ $b=a+c$ សមីការមានឫស $x_1=-1$, $x_2=-\frac{c}{a}$

ង_រូបមន្តដាក់ជាផលគុណកត្តា

បើ α និង β ជាឫសរបស់សមីការ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ នោះគេបាន :

$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ ។

ច_បង្កើតសមីការដឺក្រេទីពីរ

បើគេដឹងផលបូក $\alpha+\beta=S$ និង ផលគុណ $\alpha\beta=P$ នោះ α និង β ជាឫសសមីការ ដឺក្រេទីពីរ $x^2-Sx+P=0$ ។

២_វិសមភាព

ក_លក្ខណៈវិសមភាព

1. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ បើ $\mathbf{a > b}$ នោះគេបាន $\mathbf{a + c > b + c}$

ឬ $\mathbf{a - c > b - c}$ ។

2. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ គេមាន :

-បើ $\mathbf{a > b}$ និង $\mathbf{c > 0}$ នោះ $\mathbf{ac > bc}$

-បើ $\mathbf{a > b}$ និង $\mathbf{c < 0}$ នោះ $\mathbf{ac < bc}$

ខ_វិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត និង មធ្យមធរណីមាត្រ

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\mathbf{a \geq 0}$ និង $\mathbf{b \geq 0}$ គេមាន :

$\mathbf{\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}}$ ។

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពលុះត្រាតែ $\mathbf{a = b}$ ។

៣_វិសមីការតម្លៃដាច់ខាត

បើ $\alpha > \mathbf{0}$ នោះគេបាន :

1. $\mathbf{|ax+b| < \alpha \Leftrightarrow ax+b < \alpha}$ និង $\mathbf{ax+b > -\alpha}$

2. $\mathbf{|ax+b| > \alpha \Leftrightarrow ax+b > \alpha}$ ឬ $\mathbf{ax+b < -\alpha}$

3. $\mathbf{|ax+b| = \alpha \Leftrightarrow ax+b = \pm\alpha}$

៤_សញ្ញារបស់ទ្វេធាដឺក្រេទីមួយ

ចំពោះទ្វេធា $\mathbf{f(x)=ax+b}$ មាន $\mathbf{x=-\frac{b}{a}}$ ជាឫស គេកំណត់សញ្ញាទ្វេធានេះទៅតាមសញ្ញារបស់ **a** ដូចតារាងខាងក្រោម :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)=ax+b$	*សញ្ញាផ្ទុយពី* **a**	0	*សញ្ញាដូច* **a**

៥_សញ្ញារបស់ត្រីធាដឺក្រេទីពីរ

ចំពោះត្រីធា $\mathbf{f(x)=ax^2+bx+c}$ មានឫសពីរ α និង β ដែល $\alpha<\beta$ ។

x	$-\infty$	α		β	$+\infty$
$f(x)=ax^2+bx+c$	*សញ្ញាដូច* **a**	0	*សញ្ញាផ្ទុយពី* **a**	0	*សញ្ញាដូច* **a**

៦_ចម្លើយវិសមីការដឺក្រេទីពីរ

-ករណី $\Delta>0$ និង $a>0$ មានឫស α,β $(\alpha<\beta)$

ក. $\mathbf{ax^2+bx+c>0}$ មានចម្លើយ $x<\alpha$, $x>\beta$ ។

ខ. $\mathbf{ax^2+bx+c<0}$ មានចម្លើយ $\alpha<x<\beta$ ។

គ. $\mathbf{ax^2+bx+c\geq 0}$ មានចម្លើយ $x\leq\alpha$, $x\geq\beta$ ។

ឃ. $\mathbf{ax^2+bx+c\leq 0}$ មានចម្លើយ $\alpha\leq x\leq\beta$ ។

-ករណី $\Delta = 0$ និង $a > 0$ មានឫសឌុប

ក. $ax^2 + bx + c > 0$ មានចម្លើយគ្រប់ចំនួនពិតលើកលែងតែ $x = -\frac{b}{2a}$

ខ. $ax^2 + bx + c < 0$ គ្មានចម្លើយ ។

គ. $ax^2 + bx + c \geq 0$ មានចម្លើយគ្រប់ចំនួនពិតទាំងអស់ ។

ឃ. $ax^2 + bx + c \leq 0$ មានចម្លើយ $x = -\frac{b}{2a}$ ។

-ករណី $\Delta < 0$ និង $a > 0$ មានឫសជាចំនួនកុំផ្លិច

ក. $ax^2 + bx + c > 0$ មានចម្លើយគ្រប់ចំនួនពិតទាំងអស់ ។

ខ. $ax^2 + bx + c < 0$ គ្មានចម្លើយ ។

គ. $ax^2 + bx + c \geq 0$ មានចម្លើយគ្រប់ចំនួនពិតទាំងអស់ ។

ឃ. $ax^2 + bx + c \leq 0$ គ្មានចម្លើយ ។

✍ ✍ ✍ ✍ ✍

រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន
Tel : (017) 768 246

កម្រងលំហាត់ជ្រើសរើស

1. គេមានសមីការ $x^2-2x-1=0$ មានឫសពីរគឺ α និង β ។

ចូរគណនា $A=\alpha^4+6\beta^2$ ។

2. គេឱ្យសមីការ $x^2-x-1=0$ មានឫសពីរគឺ α និង β ។

ចូរគណនា $A=\alpha^5+2\beta^3+\beta$

3. គេឱ្យសមីការ $(E): x^2-2(m+1)x+4m-9=0$

ក. បង្ហាញថា (E) មានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិតជានិច្ចគ្រប់តម្លៃ m ។

ខ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យ ${x_1}^2+{x_2}^2=2(x_1+x_2)+17$ ដែល x_1, x_2 ជាឫស ។

4. គេឱ្យសមីការ $(E_1): x^2+px+q=0$ និង $(E_2): x^2+p'x+q'=0$

ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង p , q , p' , q' ដើម្បីឱ្យ (E_1) និង (E_2) មានឫសរួមមួយ ។

5. គេឱ្យសមីការ $(E_1): x^2+px+q=0$ និង $(E_2): x^2+p'x+q'=0$

ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង p , q , p' , q' ដើម្បីឱ្យ (E_1) និង (E_2) មានឫសរួមមួយ ។

6. គេឱ្យ $a\ge 0$, $b\ge 0$, $c\ge 0$ ។

ក.ចូរស្រាយថា $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ និង $c+\dfrac{a+b+c}{3}\ge 2\sqrt{c.\dfrac{a+b+c}{3}}$

ខ. ដោយប្រើវិសមភាពខាងលើនេះចូរស្រាយថា $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$

7. គេឱ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរស្រាយថា $(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)$

8. គេឱ្យ a , b , x , y ជាចំនួនវិជ្ជមាន និង $a+b=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{ax+by} \geq a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$ ។

9.គេឱ្យ $a , b , c > 0$ ដែល $abc \geq 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $(1+\frac{a^2}{1+a})(1+\frac{b^2}{1+b})(1+\frac{c^2}{1+c}) \geq \frac{27}{8}$

10. គេឱ្យ a, b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3} \geq \frac{10}{9}(a+b+c)^2$$

11. គេឱ្យ a, b , c, d ជាបីចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមភាព :

$$(a^2+b^2-1)(c^2+d^2-1) > (ac+bd-1)^2$$

ចូរបង្ហាញថា $a^2+b^2>1$ និង $c^2+d^2>1$ ។

12. គេឱ្យ $x , y, z > 0$ ដែល $x+y+z=1$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{x^3}{(1-x)^2}+\frac{y^3}{(1-y)^2}+\frac{z^3}{(1-z)^2} \geq \frac{1}{4}$

13. គេមានសមីការ (E): $x^2+px+q=0$

បើ $x=\sqrt[3]{\alpha}$ ជាឬសរបស់សមីការ (E) នោះចូរស្រាយថាគេមានទំនាក់ទំនង

$$\alpha^2+(p^3-3pq)\alpha+q^3=0$$ ។

14. ដោះស្រាយសមីការ

$$\frac{x^2-3x+2(1+\sqrt{3})}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\sqrt{x^2-3x+2}$$

15. ដោះស្រាយសមីការ

$$x^2-x+6=\sqrt{x^3+8}$$

✍✍✍✍✍

លំហាត់ទី១

គេមានសមីការ $x^2-2x-1=0$ មានឫសតាងដោយ α និង β ។

ចូរគណនា $A=\alpha^4+6\beta^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $A=\alpha^4+6\beta^2$

ដោយ α និង β ជាឫស $x^2-2x-1=0$ នោះគេបាន $\begin{cases}\alpha^2-2\alpha-1=0 & (1)\\ \beta^2-2\beta-1=0 & (2)\end{cases}$

តាម (1) គេទាញ $\alpha^2=2\alpha+1$

លើកជាការេគេបាន $\alpha^4=(2\alpha+1)^2$

$$\alpha^4=4\alpha^2+4\alpha+1$$

$$\alpha^4=4(2\alpha+1)+4\alpha+1$$

$$\alpha^4=12\alpha+5$$

តាម (2) គេទាញ $\beta^2=2\beta+1$

គេបាន $A=\alpha^4+6\beta^2$

$$=12\alpha+5+6(2\beta+1)$$

$$=12(\alpha+\beta)+11$$

ដោយ $\alpha+\beta=2$ នោះ $A=12(2)+11=35$

ដូចនេះ $A=35$ ។

លំហាត់ទី២

គេឱ្យសមីការ $x^2 - x - 1 = 0$ មានឫសពាងដោយ α និង β ។

ចូរគណនា $A = \alpha^5 + 2\beta^3 + \beta$

ដំណោះស្រាយ

គណនា $A = \alpha^5 + 2\beta^3 + 3\beta$

ដោយ α និង β ជាឫសនៃ $x^2 - x - 1 = 0$ នោះគេបាន $\begin{cases} \alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \\ \beta^2 - \beta - 1 = 0 \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} \alpha^2 = \alpha + 1 \\ \beta^2 = \beta + 1 \end{cases}$

គេមាន $A = \alpha^5 + 2\beta^3 + \beta$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha(\alpha^2)^2 + 2\beta.\beta^2 + \beta \\
&= \alpha(\alpha+1)^2 + 2\beta(\beta+1) + \beta \\
&= \alpha(\alpha^2 + 2\alpha + 1) + 2\beta^2 + 2\beta + \beta \\
&= \alpha(\alpha + 1 + 2\alpha + 1) + 2(\beta + 1) + 3\beta \\
&= \alpha(3\alpha + 2) + 5\beta + 2 \\
&= 3\alpha^2 + 2\alpha + 5\beta + 2 \\
&= 3(\alpha + 1) + 2\alpha + 5\beta + 2 \\
&= 5(\alpha + \beta) + 2
\end{aligned}
$$

ដោយ $\alpha + \beta = 1$ នោះ $A = 5 + 2 = 7$

ដូចនេះ $A = 7$ ។

លំហាត់ទី៣

គេឱ្យសមីការ $(E): x^2 - 2(m+1)x + 4m - 9 = 0$

ក. បង្ហាញថា (E) មានឬសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិតជានិច្ចគ្រប់តម្លៃ m ។

ខ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យ $x_1{}^2 + x_2{}^2 = 2(x_1 + x_2) + 17$ ដែល x_1, x_2 ជាឬស ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (E) មានឬសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិតជានិច្ចគ្រប់តម្លៃ m

ឌីសគ្រីមីណង់បង្រួមនៃសមីការគឺ :

$\Delta' = (m+1)^2 - (4m-9)$

$= m^2 + 2m + 1 - 4m + 9 = (m-1)^2 + 9 > 0 \ \forall m \in IR$

ដូចនេះ (E) មានឬសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិតជានិច្ចគ្រប់តម្លៃ m ។

ខ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យ $x_1{}^2 + x_2{}^2 = 2(x_1 + x_2) + 18$

ដោយ x_1, x_2 ជាឬសនោះ $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) & (1) \\ x_1 x_2 = 4m - 9 & (2) \end{cases}$

គេមាន $x_1{}^2 + x_2{}^2 = 2(x_1 + x_2) + 17$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2(x_1 + x_2) + 17 \quad (3)$$

យកសមីការ $(1) \& (2)$ ជំនួសក្នុង (3) គេបាន :

$4(m+1)^2 - 2(4m-9) = 4(m+1) + 17$

$4m^2 - 4m + 1 = 0$

$$(2m-1)^2 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

លំហាត់ទី៤

គេឱ្យសមីការ $(E_1): x^2 + px + q = 0$ និង $(E_2): x^2 + p'x + q' = 0$

ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង p , q , p' , q' ដើម្បីឱ្យ (E_1) និង (E_2) មានឫសរួមមួយ ។

ដំណោះស្រាយ

រកទំនាក់ទំនងរវាង p , q , p' , q'

តាង α ជាឫសរួមរបស់សមីការ (E_1) និង (E_2) នោះគេបាន :

$$\begin{cases} \alpha^2 + p\alpha + q = 0 & (1) \\ \alpha^2 + p'\alpha + q' = 0 & (2) \end{cases}$$

ដកសមីការ $(1)\&(2)$ គេបាន : $(p-p')\alpha + (q-q') = 0$

គេទាញ $\alpha = -\dfrac{q-q'}{p-p'}$ យកជំនួសក្នុងសមីការ (1) គេបាន :

$$\left(-\frac{q-q'}{p-p'}\right)^2 + p\left(-\frac{q-q'}{p-p'}\right) + q = 0$$

$$(q-q')^2 - p(p-p')(q-q') + q(p-p')^2 = 0$$

$$(q-q')^2 - (p-p')[p(q-q') - q(p-p')] = 0$$

$$(q-q')^2 - (p-p')(p'q - pq') = 0$$

ដូចនេះ $(q-q')^2 = (p-p')(p'q - pq')$ ។

លំហាត់ទី៥

គេឱ្យសមីការ $(E_1): x^2+px+q=0$ និង $(E_2): x^2+p'x+q'=0$

ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង p , q , p' , q' ដើម្បីឱ្យ (E_1) និង (E_2) មានឫសរួមមួយ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$

តាមមធ្យមនព្វន្ត និង មធ្យមធរណីមាត្រគេមាន :

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\ \Rightarrow a+b\geq 2\sqrt{ab}\quad (1)$$

ដូចគ្នាដែរគេបាន $b+c\geq 2\sqrt{bc}\quad (2)$ និង $c+a\geq 2\sqrt{ac}\quad (3)$

ធ្វើវិធីគុណវិសមភាព (1) , (2) & (3) អង្គនិងអង្គគេបាន :

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 2\sqrt{ab}.2\sqrt{bc}.2\sqrt{ac}$$

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8\sqrt{a^2b^2c^2}=8abc$$

ដូចនេះ $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$ ។

លំហាត់ទី៦

គេឱ្យ $a \ge 0$, $b \ge 0$, $c \ge 0$ ។

ក.ចូរស្រាយថា $a+b \ge 2\sqrt{ab}$ និង $c+\frac{a+b+c}{3} \ge 2\sqrt{c.\frac{a+b+c}{3}}$

ខ. ដោយប្រើវិសមភាពខាងលើនេះចូរស្រាយថា $a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថា $a+b \ge 2\sqrt{ab}$ និង $c+\frac{a+b+c}{3} \ge 2\sqrt{c.\frac{a+b+c}{3}}$

ឧបមាថា $a+b \ge 2\sqrt{ab}$ ពិត

គេបាន $a+b-2\sqrt{ab} \ge 0$

$$(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}.\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \ge 0$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \ge 0 \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ $a+b \ge 2\sqrt{ab}$ ។

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $c+\frac{a+b+c}{3} \ge 2\sqrt{c.\frac{a+b+c}{3}}$ ។

ខ.ស្រាយថា $a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$

គេមាន $a+b \ge 2\sqrt{ab}$ (1)

$$c+\frac{a+b+c}{3} \ge 2\sqrt{c.\frac{a+b+c}{3}} \quad (2)$$

បូកវិសមភាព (1) & (2) អង្គ និង អង្គគេបាន :

$$a+b+c+\frac{a+b+c}{3}\ge 2(\sqrt{ab}+\sqrt{c.\frac{a+b+c}{3}})$$

$$\frac{4}{3}(a+b+c)\ge 2(\sqrt{ab}+\sqrt{c.\frac{a+b+c}{3}})\quad (3)$$

ដោយ $\sqrt{ab}+\sqrt{c.\frac{a+b+c}{3}}\ge 2\sqrt{\sqrt{ab}.\sqrt{c.\frac{a+b+c}{3}}}=2\sqrt[4]{abc.\frac{a+b+c}{3}}$ **(4)**

តាម **(3) & (4)** គេបាន :

$$\frac{4}{3}(a+b+c)\ge 4\sqrt[4]{abc.\frac{a+b+c}{3}}$$

$$a+b+c\ \ge 3\sqrt[4]{abc.\frac{a+b+c}{3}}$$

លើកអង្គទាំងពីរជាស្វ័យគុណ **4** គេបាន :

$$(a+b+c)^4\ge 81.abc.\frac{a+b+c}{3}$$

$$(a+b+c)^3\ge 27abc$$

ដូចនេះ $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$ ។

លំហាត់ទី៧

គេឱ្យ **a , b , c** ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរស្រាយថា $(ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c)$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $(ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c)$

តាមវិសមភាព មធ្យមនព្វន្ត និង មធ្យមធរណីមាត្រគេមាន :

$$\frac{a^2b^2+b^2c^2}{2} \ge ab^2c \quad (1)$$

$$\frac{b^2c^2+c^2a^2}{2} \ge abc^2 \quad (2)$$

$$\frac{a^2b^2+c^2a^2}{2} \ge a^2bc \quad (3)$$

បូកវិសមភាពទាំងនេះអង្គនិងអង្គគេបាន :

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \ge ab^2c+abc^2+a^2bc \quad (4)$$

មាន $(ab+bc+ca)^2 = a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2(a^2bc+abc^2+a^2bc)$

ឬ $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 = (ab+bc+ca)^2-2(ab^2c+abc^2+a^2bc)$

វិសមភាព **(4)** អាចសរសេរ :

$$(ab+bc+ca)^2-2(ab^2c+abc^2+a^2bc) \ge a^2bc+ab^2c+abc^2$$

$$(ab+bc+ca)^2 \ge 3(a^2bc+ab^2c+abc^2)$$

ដូចនេះ $(ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c)$ ។

លំហាត់ទី៨

គេឱ្យ a , b , x , y ជាចំនួនវិជ្ជមាន និង $a+b=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{ax+by} \ge a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\sqrt{ax+by} \ge a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$

ឧបមាថា $\sqrt{ax+by} \ge a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$ ពិត

សមមូល $ax+by \ge (a\sqrt{x}+b\sqrt{y})^2$

$$ax+by \ge a^2x+2ab\sqrt{xy}+b^2y \quad (1)$$

ដោយ $a+b=1$ នោះ វិសមភាព (1) អាចសរសេរ :

$$(ax+by)(a+b) \ge a^2x+2ab\sqrt{xy}+b^2y$$

$$a^2x+abx+aby+b^2y \ge a^2x+2ab\sqrt{xy}+b^2y$$

$$abx+aby-2ab\sqrt{xy} \ge 0$$

$$ab(x+y-2\sqrt{xy}) \ge 0$$

$$ab(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \ge 0$$ ពិត

ដូចនេះ $\sqrt{ax+by} \ge a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$ ។

លំហាត់ទី៩

គេឱ្យ $a, b, c > 0$ ដែល $abc \ge 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $(1+\frac{a^2}{1+a})(1+\frac{b^2}{1+b})(1+\frac{c^2}{1+c}) \ge \frac{27}{8}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $(1+\frac{a^2}{1+a})(1+\frac{b^2}{1+b})(1+\frac{c^2}{1+c}) \ge \frac{27}{8}$

គេមាន $a^2+1 \ge 2a$ គ្រប់ $a > 0$

គេបាន $4a^2+4a+4 \ge 3a^2+6a+3 = 3(a+1)^2$

គេទាញ $a^2+a+1 \ge \frac{3(a+1)^2}{4}$

ឬ $\frac{a^2+a+1}{a+1} \ge \frac{3(a+1)}{4}$

ឬ $1+\frac{a^2}{1+a} \ge \frac{3\sqrt{a}}{2}$ ព្រោះ $a+1 \ge 2\sqrt{a}$

ដូចគ្នាដែរ $1+\frac{b^2}{1+b} \ge \frac{3\sqrt{b}}{2}$ និង $1+\frac{c^2}{1+c} \ge \frac{3\sqrt{c}}{2}$

គេបាន$(1+\frac{a^2}{1+a})(1+\frac{b^2}{1+b})(1+\frac{c^2}{1+c}) \ge \frac{27\sqrt{abc}}{8}$

ដោយសម្មតិកម្ម $abc \ge 1$ នោះ $\frac{27\sqrt{abc}}{8} \ge \frac{27}{8}$

ដូចនេះ $(1+\frac{a^2}{1+a})(1+\frac{b^2}{1+b})(1+\frac{c^2}{1+c}) \ge \frac{27}{8}$ ។

លំហាត់ទី១០

គេឱ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3}\geq\frac{10}{9}(a+b+c)^2$$

ដំណោះស្រាយ

គេមានសមភាព :

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$a^5+b^5+c^5=(a+b+c)^5-5(a+b)(b+c)(c+a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$$

$$\frac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3}=\frac{5}{3}(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$$

យើងនឹងស្រាយថា $\frac{5}{3}(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)\geq\frac{10}{9}(a+b+c)^2$

ឬ $3(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)\geq 2(a+b+c)^2$

ឬ $$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$$

តាមវិសមភាព មធ្យមនព្វន្ត និង មធ្យមធរណីមាត្រគេមាន :

$$\frac{a^2+b^2}{2}\geq ab\ ,\ \frac{b^2+c^2}{2}\geq bc\ ,\ \frac{c^2+a^2}{2}\geq ac$$

នោះ $ab+bc+ca\leq\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2}=a^2+b^2+c^2$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3}\geq\frac{10}{9}(a+b+c)^2$ ។

លំហាត់ទី១១

គេឱ្យ a, b, c, d ជាបីចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមភាព :

$(a^2+b^2-1)(c^2+d^2-1)>(ac+bd-1)^2$

ចូរបង្ហាញថា $a^2+b^2>1$ និង $c^2+d^2>1$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $a^2+b^2>1$ និង $c^2+d^2>1$

តាង $x=1-a^2-b^2$ និង $y=1-c^2-d^2$

យើងឧបមាថា $x\geq 0$ និង $y\geq 0$

វិសមភាព $(a^2+b^2-1)(c^2+d^2-1)>(ac+bd-1)^2$

សមមូល $xy>(ac+bd-1)^2$

ឬ $4xy>(2ac+2bd-2)^2$

ដោយ $x+y=2-a^2-b^2-c^2-d^2$

នោះ $2ac+2bd-2=-a^2-b^2-c^2-d^2+2ac+2bd-x-y$

$$=-[(a-c)^2+(b-d)^2+x+y]$$

គេទាញ $4xy>[(a-c)^2+(b-d)^2+(x+y)]^2\geq(x+y)^2$

ឬ $4xy>x^2+2xy+y^2$

ឬ $(x-y)^2<0$ មិនពិត ។ នាំឱ្យការឧបមាខាងលើផ្ទុយពីការពិត ។

ដូចនេះគេទាញ $x<0$ និង $y<0$ នាំឱ្យ$a^2+b^2>1$ និង $c^2+d^2>1$ ។

លំហាត់ទី១២

គេឱ្យ $x , y , z > 0$ ដែល $x+y+z=1$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{x^3}{(1-x)^2}+\frac{y^3}{(1-y)^2}+\frac{z^3}{(1-z)^2}\ge\frac{1}{4}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{x^3}{(1-x)^2}+\frac{y^3}{(1-y)^2}+\frac{z^3}{(1-z)^2}\ge\frac{1}{4}$

គេពិនិត្យ $\frac{x^3}{(1-x)^2}=\frac{(x-2x^2+x^3)+(2x^2-x)}{(1-x)^2}$

$$=x+\frac{2x^2-x}{(1-x)^2}$$

$$=x+\frac{(9x^2-6x+1)-(1-2x+x^2)}{4(1-x)^2}$$

$$=x+\frac{(3x-1)^2-(1-x)^2}{4(1-x)^2}=x-\frac{1}{4}+\frac{(3x-1)^2}{4(1-x)^2}$$

ដោយ $\frac{(3x-1)^2}{4(1-x)^2}\ge 0$ នោះ $\frac{x^3}{(1-x)^2}\ge x-\frac{1}{4}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\frac{y^3}{(1-y)^2}\ge y-\frac{1}{4}$ (2) និង $\frac{z^3}{(1-z)^2}\ge z-\frac{1}{4}$ (3)

បូកវិសមភាព (1) , (2) , (3) អង្គ និង អង្គគេបាន :

$\frac{x^3}{(1-x)^2}+\frac{y^3}{(1-y)^2}+\frac{z^3}{(1-z)^2}\ge x+y+z-\frac{3}{4}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ ពិត ។

លំហាត់ទី១៣

គេមានសមីការ $(E):\ x^2+px+q=0$

បើ $x=\sqrt[3]{\alpha}$ ជាឬសរបស់សមីការ (E) នោះចូរស្រាយថាគេមានទំនាក់ទំនង

$\alpha^2+(p^3-3pq)\alpha+q^3=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\alpha^2+(p^3-3pq)\alpha+q^3=0$

បើ $x=\sqrt[3]{\alpha}$ ជាឬសរបស់សមីការ (E) នោះគេបាន $\sqrt[3]{\alpha^2}+p\sqrt[3]{\alpha}+q=0$ ។

តាមសមភាព

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

បើគេយក $a=\sqrt[3]{\alpha^2}$, $b=p\sqrt[3]{\alpha}$, $c=q$ គេបាន :

$\alpha^2+p^3\alpha+q^3-3\alpha pq=0$ (ព្រោះ $\sqrt[3]{\alpha^2}+p\sqrt[3]{\alpha}+q=0$)

ដូចនេះ $\alpha^2+(p^3-3pq)\alpha+q^3=0$ ពិត ។

លំហាត់ទី១៤

ដោះស្រាយសមីការ

$$\frac{x^2-3x+2(1+\sqrt{3})}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\sqrt{x^2-3x+2}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ

$$\frac{x^2-3x+2(1+\sqrt{3})}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\sqrt{x^2-3x+2}$$

សមីការមានន័យលុះត្រាតែ $x^2-3x+2\geq 0$

នាំឱ្យ $x\leq 1$ ឬ $x\geq 2$ ។

តាង $t=\sqrt{x^2-3x+2}$ សមីការអាចសរសេរ :

$\frac{t^2+2\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=t$ ឬ $t^2-(\sqrt{6}+\sqrt{2})t+2\sqrt{3}=0$

$\Delta=(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-8\sqrt{3}=(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2$

គេទាញឫស $t_1=\sqrt{2}$, $t_2=\sqrt{6}$

-ចំពោះ $t=\sqrt{2}$ នោះ $\sqrt{x^2-3x+2}=\sqrt{2}$ ឬ $x^2-3x=0\Rightarrow x_1=0$, $x_2=3$

-ចំពោះ $t=\sqrt{6}$ នោះ $\sqrt{x^2-3x+2}=\sqrt{6}$ ឬ $x^2-3x-4=0\Rightarrow x_1=-1$, $x_2=4$

ដូចនេះ $x\in\{-1, 0, 3, 4\}$ ។

លំហាត់ទី១៥

ដោះស្រាយសមីការ $x^2 - x + 6 = \sqrt{x^3 + 8}$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ

គេមាន $x^2 - x + 6 = \sqrt{x^3 + 8}$

$$x^2 - x + 6 = \sqrt{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}$$

សមីការមានន័យលុះត្រាតែ $(x+2)(x^2 - 2x + 4) \geq 0$

ដោយ $x^2 - 2x + 4 > 0$ ជានិច្ចគ្រប់ $x \in IR$ ពោះ $a = 1 > 0$, $\Delta = -12 < 0$

ហេតុនេះគេត្រូវឱ្យ $x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$ ។

តាង $u = x + 2$, $v = x^2 - 2x + 4$

សមីការអាចសរសេរ $u + v \geq 2\sqrt{uv} \Leftrightarrow (\sqrt{u} - \sqrt{v})^2 = 0$ ឬ $u = v$

គេបាន $x + 2 = x^2 - 2x + 4$

ឬ $-x^2 + 3x - 2 = 0$ ដោយ $a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a} = 2$

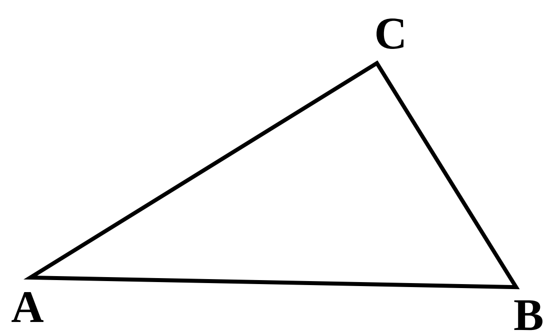
ដូចនេះ $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ ។

មេរៀនសង្ខេប

អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ និង ការអនុវត្តន៍

១_និយមន័យ

ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណកែង **ABC** បើ **A** ជាមុំស្រួចមួយនោះគេមានទំនាក់ទំនងដូចខាងក្រោម :



$$\sin A = \frac{BC}{AB} \;;\; \cos A = \frac{AC}{AB}$$

$$\tan A = \frac{BC}{AC} \;;\; \cot A = \frac{AC}{BC}$$

២_ទំនាក់ទំនងរវាងផលធៀបត្រីកោណមាត្រ

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \;;\; \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \;;\; \tan A = \frac{1}{\cot A}$$

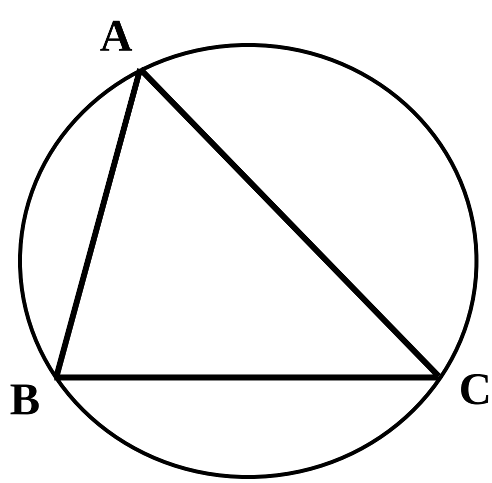
$$1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A} \;;\; 1 + \cot^2 A = \frac{1}{\sin^2 A}$$

៣_តារាងតម្លៃផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំពិសេស

α	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	120^o	135^o	150^o	180^o
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	មិនកំណត់	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

៤_ទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស

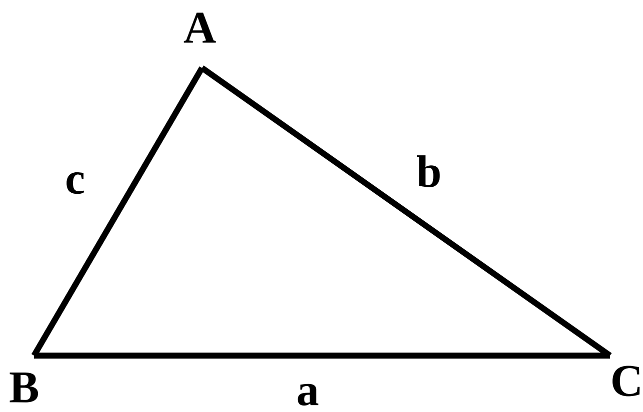
គេឱ្យត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយមានជ្រុង $\mathbf{BC = a}$, $\mathbf{AC = b}$, $\mathbf{AB = c}$ ចារឹកក្នុងរង្វង់មួយមានផ្ចិត $\mathbf{O}$ និងកាំ $\mathbf{R}$ ។



គេមានទំនាក់ទំនង $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ ។

៥-ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយមានជ្រុង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$



គេមានទំនាក់ទំនងដូចខាងក្រោម :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

៦-ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ

ក-ករណីស្គាល់ជ្រុងពីរ និង មុំមួយ

ផ្ទៃក្រឡា **S** នៃត្រីកោណ **ABC** មួយកំណត់ដោយ :

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$$

ខ-ករណីស្គាល់ជ្រុងទាំងបី (រូបមន្តហេរ៉ុង)

ផ្ទៃក្រឡា **S** នៃត្រីកោណ **ABC** មួយកំណត់ដោយ :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ ដែល $$p = \frac{a+b+c}{2}$$ ។

កម្រងលំហាត់ជ្រើសរើស

1. គេមានត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយកែងត្រង់ $\mathbf{C}$ ។ គេដឹងថា $\mathbf{AB=10\ cm}$

និង $\mathbf{\sin A+\sin B=\frac{7}{5}}$ ។

ចូរកំណត់ជ្រុង $\mathbf{AC}$ និង $\mathbf{BC}$ រួចទាញរក $\mathbf{\tan A}$ និង $\mathbf{\tan B}$ ។

2. ដោយដឹងថា $\mathbf{\tan\alpha=\frac{5}{12}}$ និង $\mathbf{0^o<\alpha<90^o}$ ។

ចូរគណនាតម្លៃនៃ $\mathbf{\cos\alpha}$, $\mathbf{\sin\alpha}$ និង $\mathbf{\cot\alpha}$ ។

3. ចូរគណនា $\mathbf{A=\sqrt{\sin^4 x+4\cos^2 x}+\sqrt{\cos^4 x+4\sin^2 x}}$

$$\mathbf{B=(a\sin x+b\cos x)^2+(a\cos x-b\sin x)^2}$$

4. គេដឹងថា $\mathbf{\tan x=\sqrt{\frac{b}{a}}}$ ។

ចូរស្រាយថា $\mathbf{\frac{\cos^4 x}{a}+\frac{\sin^4 x}{b}=\frac{1}{a+b}}$

5. គេដឹងថា $\mathbf{\sin x+\cos x=\frac{41}{29}}$ ។

ចូរគណនាផលគុណ $\mathbf{\sin x.\cos x}$ រួចទាញរក $\mathbf{\sin x}$ និង $\mathbf{\cos x}$ ។

6. គេដឹងថា $\mathbf{\tan x+\cot x=a}$ ដែល $\mathbf{0<x<90^o}$ និង $\mathbf{a\geq 2}$ ។

ចូរគណនា $\mathbf{\tan^3 x+\cot^3 x}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\mathbf{a}$ ។

7. ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{x\in IR}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់សមភាព :

ក. $\mathbf{\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x}$

ខ. $\frac{1}{4}(\sin^8 x+\cos^8 x)-\frac{1}{2}(\sin^4 x+\cos^4 x)+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\sin^4 x\cos^4 x$

8. គេដឹងថា $\cos a=\frac{m}{n+p}$, $\cos b=\frac{n}{p+m}$, $\cos c=\frac{p}{m+n}$

ចូរគណនាកន្សោម :

$$M=\frac{\sin^2 a}{2+2\cos a-\sin^2 a}+\frac{\sin^2 b}{2+2\cos b-\sin^2 b}+\frac{\sin^2 c}{2+2\cos c-\sin^2 c}$$

9.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $|a\cos x+b\sin x|\le\sqrt{a^2+b^2}$

10. គេមានត្រីកោណ ABC មួយដែល $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់សមភាព

$$bc\cos A+ac\cos B+ab\cos C=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

11. គេមានត្រីកោណ ABC មួយដែល $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ ។

តាង R និង S រៀងគ្នាជាកាំ និង ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC នេះ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{R(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)}{4S}$

12. ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ ABC ចូរស្រាយថា :

$$(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)=\frac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{2}$$

13. ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណចូរស្រាយថា :

$$(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)=8\left(\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}\right)^2$$

ដែល a , b , c ជាជ្រុងត្រីកោណ ABC និង $p=\frac{a+b+c}{2}$ ។

14. គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយ ។

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $1-\cos A \le \frac{a^2}{2bc}$

ដែល **a , b , c** ជាជ្រុងត្រីកោណ **ABC** ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា $(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C) \le \frac{1}{8}$

15. គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយ ។

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B\sin C\cos A$

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា :

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C}$$

16. គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយមានមុំ A, B, C ជាមុំស្រួចដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\right)$$ ។

ចូរស្រាយថា **ABC** ជាត្រីកោណសមង្ស័ ?

17. គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយមានជ្រុង $AB = 5\,cm$ និងផ្ទៃក្រឡា $S = 6\,cm^2$ ។

គណនាតម្លៃ $\cot A + \cot B$ ។

18. តាង **R** ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង **S** ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ **ABC** មួយ ។

ក. ចូរស្រាយថា $(\cot A + \cot B)(\cot B + \cot C)(\cot C + \cot A) = \frac{2R^2}{S}$

ខ. បើ **ABC** ជាមុំស្រួចនោះចូរទាញឱ្យបានថា : $\cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8}$ ។

19. គេឱ្យត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយមានជ្រុង $\mathbf{BC=a}$, $\mathbf{AC=b}$, $\mathbf{AB=c}$ ចារឹកក្នុងរង្វង់មួយមានផ្ចិត $\mathbf{O}$ និង កាំ $\mathbf{R}$ ។ តាង $\mathbf{S}$ និង $\mathbf{S_{OBC}}$ ជាផ្ទៃក្រឡានៃ $\mathbf{\Delta OBC}$ និង $\mathbf{\Delta ABC}$ រៀងគ្នា ។ សន្មតថា $\mathbf{A,B,C}$ ជាមុំស្រួច ។

ក. ចូរស្រាយថា $\mathbf{S_{OBC}=\frac{1}{4}a^2\cot A}$ ។

ខ. ចូរទាញបង្ហាញថា $\mathbf{a^2\cot A+b^2\cot B+c^2\cot C=4S}$ ។

គ. ចូរទាញបង្ហាញថា $\mathbf{a\cos A+b\cos B+c\cos C=\frac{abc}{2R^2}}$ ។

20. គេឱ្យត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយមានជ្រុង $\mathbf{BC=a}$, $\mathbf{AC=b}$, $\mathbf{AB=c}$ ។ តាង $\mathbf{p=\frac{a+b+c}{2}}$ ជាកន្លះបរិមាត្រ ហើយ $\mathbf{r}$ និង $\mathbf{R}$ ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ រៀងគ្នា ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

ក. $\mathbf{ab+bc+ca=p^2+r^2+4rR}$

ខ. $\mathbf{a^2+b^2+c^2=2p^2-2r^2-8rR}$

គ. $\mathbf{a^3+b^3+c^3-3abc=2p(p^2-3r^2-12rR)}$

21.គេឱ្យត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយ ។ $\mathbf{D}$ ជាចំណុចមួយនៃជ្រុង $\mathbf{[BC]}$ ដែល $\mathbf{\angle BAD=\alpha}$ និង $\mathbf{\angle DAC=\beta}$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\mathbf{\frac{BC}{AD}=\frac{\sin\alpha}{\sin B}+\frac{\sin\beta}{\sin C}}$?

លំហាត់ទី១

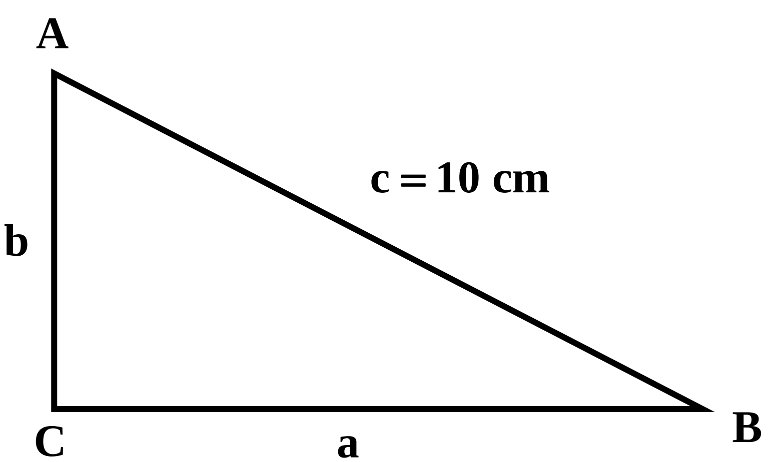
គេមានត្រីកោណ **ABC** មួយកែងត្រង់ **C** ។ គេដឹងថា $AB = 10\ cm$

និង $\sin A + \sin B = \frac{7}{5}$ ។

ចូរកំណត់ជ្រុង **AC** និង **BC** រួចទាញរក $\tan A$ និង $\tan B$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ជ្រុង AC និង BC



តាង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c = 10\ cm$

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រក្នុងត្រីកោណកែង **ABC** គេមាន $a^2 + b^2 = c^2$

ដោយ $c = 10$ នោះ $a^2 + b^2 = 100$ (1)

ម្យ៉ាងទៀតតាមនិយមន័យ $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{10}$; $\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{10}$

ដោយ $\sin A + \sin B = \frac{7}{5}$ នោះ $\frac{a}{10} + \frac{b}{10} = \frac{7}{5}$ ឬ $a + b = 14$ (2)

ទំនាក់ទំនង (1) អាចសរសេរ $(a+b)^2-2ab=100$

ឬ $ab=\frac{(a+b)^2}{2}-50=\frac{14^2}{2}-50=48 \quad (3)$

តាម (2) និង (3) គេបានប្រពន្ធ័សមីការ $\begin{cases} a+b=14 \\ ab=48 \end{cases}$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតនាំឱ្យ a និង b ជាឬសសមីការ $X^2-SX+P=0$

ឬ $X^2-14X+48=0$

$\Delta'=49-48=1$ គេទាញឬស $X_1=7-1=6$; $X_2=7+1=8$

ដូចនេះ $a=6$, $b=8$ ឬ $a=8$, $b=6$ ។

ទាញរក $\tan A$ និង $\tan B$:

-ករណី $a=6$, $b=8$ គេបាន :

$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ និង $\tan B=\frac{b}{a}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$ ។

-ករណី $a=8$, $b=6$ គេបាន :

$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$ និង $\tan B=\frac{b}{a}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ ។

លំហាត់ទី២

ដោយដឹងថា $\tan\alpha = \frac{5}{12}$ និង $0^o < \alpha < 90^o$ ។

ចូរគណនាតម្លៃនៃ $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ និង $\cot\alpha$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃ $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ និង $\cot\alpha$

គេមាន $\tan\alpha = \frac{5}{12}$ និង $0^o < \alpha < 90^o$

តាមទំនាក់ទំនង $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

គេទាញ $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+\left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{144}{169}$

ដោយ $0^o < \alpha < 90^o$ នោះ $\cos\alpha > 0$

ដូចនេះ $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ ។

ហើយតាមទំនាក់ទំនង $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

គេទាញ $\sin\alpha = \tan\alpha\cos\alpha = \frac{5}{12}.\frac{12}{13} = \frac{5}{13}$ រួច $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{12}{5}$ ។

ដូចនេះ $\cos\alpha = \frac{12}{13}$; $\sin\alpha = \frac{5}{13}$; $\cot\alpha = \frac{12}{5}$ ។

លំហាត់ទី៣

ចូរគណនា $A=\sqrt{\sin^4 x+4\cos^2 x}+\sqrt{\cos^4 x+4\sin^2 x}$

$$B=(a\sin x+b\cos x)^2+(a\cos x-b\sin x)^2$$

ដំណោះស្រាយ

គណនា A និង B

$A=\sqrt{\sin^4 x+4\cos^2 x}+\sqrt{\cos^4 x+4\sin^2 x}$

ដោយ $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ នោះ $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ ឬ $\cos^2 x=1-\sin^2 x$

គេបាន $A=\sqrt{\sin^4 x+4(1-\sin^2 x)}+\sqrt{\cos^4 x+4(1-\cos^2 x)}$

$$=\sqrt{\sin^4 x-4\sin^2 x+4}+\sqrt{\cos^4 x-4\cos^2 x+4}$$

$$=\sqrt{(\sin^2 x-2)^2}+\sqrt{(\cos^2 x-2)^2}$$

$$=|\sin^2 x-2|+|\cos^2 x-2|$$

ដោយ $0\le\sin^2 x\le 1$ និង $0\le\cos^2 x\le 1$

គេបាន $A=-(\sin^2 x-2)-(\cos^2 x-2)$

$$=4-(\sin^2 x+\cos^2 x)=4-1=3$$ ។

$B=(a\sin x+b\cos x)^2+(a\cos x-b\sin x)^2$

$$=a^2(\sin^2 x+\cos^2 x)+b^2(\sin^2 x+\cos^2 x)$$

$$=a^2+b^2$$

ដូចនេះ $A=3$, $B=a^2+b^2$ ។

លំហាត់ទី៤

គេដឹងថា $\tan x = \sqrt{\frac{b}{a}}$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{\cos^4 x}{a} + \frac{\sin^4 x}{b} = \frac{1}{a+b}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{\cos^4 x}{a} + \frac{\sin^4 x}{b} = \frac{1}{a+b}$

គេមាន $\tan x = \sqrt{\frac{b}{a}}$ នាំឱ្យ $\tan^2 x = \frac{b}{a}$ ដោយ $\tan x = \frac{\cos x}{\sin x}$

គេបាន $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{b}{a}$ ឬ $\frac{\cos^2 x}{a} = \frac{\sin^2 x}{b} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{a+b} = \frac{1}{a+b}$

គេទាញ $\frac{\cos^2 x}{a} = \frac{1}{a+b}$ នាំឱ្យ $\frac{\cos^4}{a} = \frac{a}{(a+b)^2}$ (1)

ហើយ $\frac{\sin^2 x}{b} = \frac{1}{a+b}$ នាំឱ្យ $\frac{\sin^4}{b} = \frac{b}{(a+b)^2}$ (2)

បូកសមភាព (1) និង (2) អង្គ និង អង្គគេបាន :

$$\frac{\cos^4 x}{a} + \frac{\sin^4 x}{b} = \frac{a}{(a+b)^2} + \frac{b}{(a+b)^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2} = \frac{1}{a+b}$$

ដូចនេះ $\frac{\cos^4 x}{a} + \frac{\sin^4 x}{b} = \frac{1}{a+b}$ ។

លំហាត់ទី៥

គេដឹងថា $\sin x + \cos x = \dfrac{41}{29}$ ។

ចូរគណនាផលគុណ $\sin x.\cos x$ រួចទាញរក $\sin x$ និង $\cos x$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណ $\sin x.\cos x$

គេមាន $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x$

ដោយ $\sin x + \cos x = \dfrac{41}{29}$ និង $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

គេបាន $\left(\dfrac{41}{29}\right)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$ ឬ $2\sin x \cos x = \dfrac{41^2 - 29^2}{29^2} = \dfrac{840}{841}$

ដូចនេះ $\sin x.\cos x = \dfrac{420}{841}$ ។

ទាញរក $\sin x$ និង $\cos x$ ៖

ដោយគេមាន $\sin x + \cos x = \dfrac{41}{29}$ និង $\sin x.\cos x = \dfrac{420}{841}$ នោះ $\sin x$ និង $\cos x$

ជាឬសសមីការ $X^2 - \dfrac{41}{29}X + \dfrac{420}{841} = 0$ ។

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយសមីការនេះគេបាន $X_1 = \dfrac{20}{29}$; $X_2 = \dfrac{21}{29}$

ដូចនេះ $\sin x = \dfrac{20}{29}$; $\cos x = \dfrac{21}{29}$ ឬ $\sin x = \dfrac{21}{29}$; $\cos x = \dfrac{20}{29}$ ។

លំហាត់ទី៦

គេដឹងថា $\tan x + \cot x = a$ ដែល $0 < x < 90^{o}$ និង $a \geq 2$ ។

ចូរគណនា $\tan^3 x + \cot^3 x$ ជាអនុគមន៍នៃ a ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $\tan^3 x + \cot^3 x$ ជាអនុគមន៍នៃ a

គេមាន $\tan x + \cot x = a$

គេបាន $(\tan x + \cot x)^2 = a^2$

$$\tan^2 x + 2\tan x \cot x + \cot^2 x = a^2$$ ដោយ $\tan x \cot x = 1$

គេទាញ $\tan^2 x + \cot^2 x = a^2 - 2$

តាមសមភាព $A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - A.B + B^2)$

គេបាន $\tan^3 x + \cot^3 x = (\tan x + \cot x)(\tan^2 x - \tan x \cot x + \cot^2 x)$

$$= a(a^2 - 2 - 1) = a(a^2 - 3)$$

ដូចនេះ $\tan^3 x + \cot^3 x = a^3 - 3a$ ។

លំហាត់ទី៧

ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់សមភាព ៖

ក. $\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x$

ខ. $\frac{1}{4}(\sin^8 x+\cos^8 x)-\frac{1}{2}(\sin^4 x+\cos^4 x)+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\sin^4 x\cos^4 x$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់សមភាព ៖

ក. $\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x$

គេមាន $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

ឬ $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

យក $a=\sin^2 x$ និង $b=\cos^2 x$ គេបាន ៖

$$\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)$$

ដោយ $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

ដូចនេះ $\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x$ ។

ខ. $\frac{1}{4}(\sin^8 x+\cos^8 x)-\frac{1}{2}(\sin^4 x+\cos^4 x)+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\sin^4 x\cos^4 x$

គេមាន $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ឬ $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

ដូចគ្នាដែរ $a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$

ឬ $a^4+b^4=\left[(a+b)^2-2ab\right]^2-2a^2b^2$

ដោយយក $a=\sin^2 x$ និង $b=\cos^2 x$ គេបានសមភាព

$$\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$$
$$=1-2\sin^2 x\cos^2 x$$

ហើយ

$$\sin^8 x+\cos^8 x=\left[(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x\right]^2-2\sin^4 x\cos^4 x$$
$$=(1-2\sin^2 x\cos^2 x)^2-2\sin^4 x\cos^4 x$$
$$=1-4\sin^2 x\cos^2 x+2\sin^4 x\cos^4 x$$

តាងអនុគមន៍

$$f(x)=\frac{1}{4}(\sin^8 x+\cos^8 x)-\frac{1}{2}(\sin^4 x+\cos^4 x)+\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{4}(1-4\sin^2 x\cos^2 x+2\sin^4 x\cos^4 x)-\frac{1}{2}(1-2\sin^2 x\cos^2 x)+\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1-4\sin^2 x\cos^2 x+2\sin^4 x\cos^4 x-2+4\sin^2 x\cos^2 x+1}{4}$$
$$=\frac{2\sin^4 x\cos^4 x}{4}=\frac{1}{2}\sin^4 x\cos^4 x$$

ដូចនេះ $\frac{1}{4}(\sin^8 x+\cos^8 x)-\frac{1}{2}(\sin^4 x+\cos^4 x)+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\sin^4 x\cos^4 x$ ។

លំហាត់ទី៨

គេដឹងថា $\cos a = \frac{m}{n+p}$, $\cos b = \frac{n}{p+m}$, $\cos c = \frac{p}{m+n}$

ចូរគណនាកន្សោម :

$$M = \frac{\sin^2 a}{2+2\cos a - \sin^2 a} + \frac{\sin^2 b}{2+2\cos b - \sin^2 b} + \frac{\sin^2 c}{2+2\cos c - \sin^2 c}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាកន្សោម :

$$M = \frac{\sin^2 a}{2+2\cos a - \sin^2 a} + \frac{\sin^2 b}{2+2\cos b - \sin^2 b} + \frac{\sin^2 c}{2+2\cos c - \sin^2 c}$$

គេមាន $\sin^2 a = 1-\cos^2 a = (1-\cos a)(1+\cos a)$

និង $2+2\cos a - \sin^2 a = 1 + 2\cos a + \cos^2 a = (1+\cos a)^2$

គេបាន $\frac{\sin^2 a}{2+2\cos a - \sin^2 a} = \frac{(1-\cos a)(1+\cos a)}{(1+\cos a)^2} = \frac{1-\cos a}{1+\cos a}$

ហើយ $\frac{\sin^2 b}{2+2\cos b - \sin^2 b} = \frac{1-\cos b}{1+\cos b}$ និង $\frac{\sin^2 c}{2+2\cos c - \sin^2 c} = \frac{1-\cos c}{1+\cos c}$

គេបាន $E = \frac{1-\cos a}{1+\cos a} + \frac{1-\cos b}{1+\cos b} + \frac{1-\cos c}{1+\cos c}$

$$= \frac{1-\frac{m}{n+p}}{1+\frac{m}{n+p}} + \frac{1-\frac{n}{p+m}}{1+\frac{n}{p+m}} + \frac{1-\frac{p}{m+n}}{1+\frac{p}{m+n}}$$

$$= \frac{n+p-m+p+m-n+m+n-p}{m+n+p} = 1$$

ដូចនេះ $E = 1$ ។

លំហាត់ទី៩

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $|a\cos x+b\sin x|\le\sqrt{a^2+b^2}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $|a\cos x+b\sin x|\le\sqrt{a^2+b^2}$

ឧបមាថា $|a\cos x+b\sin x|\le\sqrt{a^2+b^2}$ ពិត

សមមូល $(a\cos x+b\sin x)^2\le a^2+b^2$

ដោយ $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ នោះគេបាន :

$$(a\cos x+b\sin x)^2\le(a^2+b^2)(\sin^2 x+\cos^2 x)$$
$$a^2\cos^2 x+2ab\sin x\cos x+b^2\sin^2 x\le a^2\sin^2 x+a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x$$

ឬ $a^2\sin^2 x-2ab\sin x\cos x+b^2\cos^2 x\ge 0$

ឬ $(a\sin x-b\cos x)^2\ge 0$ ពិត

ដូចនេះ $|a\cos x+b\sin x|\le\sqrt{a^2+b^2}$ ពិត ។

សម្គាល់ :

គេមាន $(a\cos x+b\sin x)^2+(a\sin x-b\cos x)^2=a^2+b^2$

ដោយ $(a\sin x-b\cos x)^2\ge 0$ នោះគេទាញបាន :

$(a\cos x+b\sin x)^2\le a^2+b^2$ ឬ $|a\cos x+b\sin x|\le\sqrt{a^2+b^2}$ ពិត ។

លំហាត់ទី១០

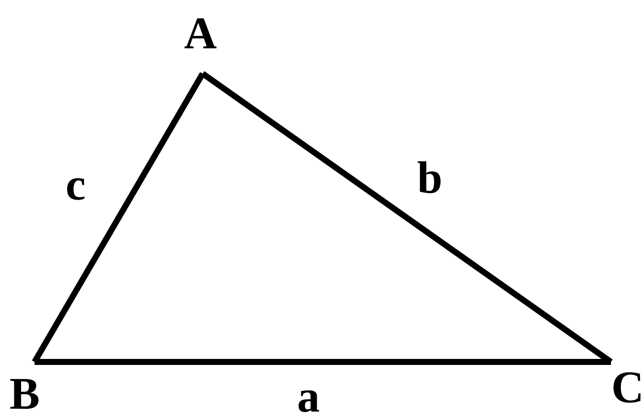
គេមានត្រីកោណ **ABC** មួយដែល $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់សមភាព

$$bc\cos A + ac\cos B + ab\cos C = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ $bc\cos A + ac\cos B + ab\cos C = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$



តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសគេមានទំនាក់ទំនង :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad (1)$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos B \quad (2)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \quad (3)$$

បូកទំនាក់ទំនង (1) , (2) & (3) អង្គនិងអង្គគេបាន :

$$a^2+b^2+c^2 = 2(a^2+b^2+c^2 - bc\cos A - ac\cos B - ab\cos C)$$

ដូចនេះ $bc\cos A + ac\cos B + ab\cos C = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$ ។

លំហាត់ទី១១

គេមានត្រីកោណ **ABC** មួយដែល $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ។

តាង **R** និង **S** រៀងគ្នាជាកាំ និង ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ **ABC** នេះ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{\cos A}{a} + \dfrac{\cos B}{b} + \dfrac{\cos C}{c} = \dfrac{R(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)}{4S}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\dfrac{\cos A}{a} + \dfrac{\cos B}{b} + \dfrac{\cos C}{c} = \dfrac{R(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)}{4S}$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស និង ស៊ីនូសអនុវត្តន៍ក្នុងត្រីកោណ **ABC** គេបាន :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ ឬ $\dfrac{\cos A}{a} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2abc}$

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ ឬ $\begin{cases} a = 2R\sin A \\ b = 2R\sin B \\ c = 2R\sin C \end{cases}$ និង $S = \dfrac{abc}{4R}$

គេបាន $\dfrac{\cos A}{a} = \dfrac{4R^2(\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A)}{8RS}$

ឬ $\dfrac{\cos A}{a} = \dfrac{R(\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A)}{4S}$ **(1)**

ដូចគ្នាដែរ $\dfrac{\cos B}{b} = \dfrac{R(\sin^2 A + \sin^2 C - \sin^2 B)}{4S}$ **(2)**

និង $\dfrac{\cos C}{c} = \dfrac{R(\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C)}{4S}$ **(3)**

បូកសមភាព **(1),(2) &(3)** គេបាន :

$\dfrac{\cos A}{a} + \dfrac{\cos B}{b} + \dfrac{\cos C}{c} = \dfrac{R(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)}{4S}$ ពិត ។

លំហាត់ទី១២

ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ **ABC** ចូរស្រាយថា **:**

$$(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)=\frac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)=\frac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{2}$$

តាងជ្រុង $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ និង $p=\frac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រ

យក **R** ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង **S** ជាផ្ទៃក្រឡារបស់ ΔABC ។

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសគេមាន $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

គេបាន $a^2=(b^2+2bc+c^2)-2bc(1+\cos A)$

គេទាញ $1+\cos A=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$

ដោយ $p=\frac{a+b+c}{2}$ នោះ $a+b+c=2p$ និង $b+c-a=2(p-a)$

គេបាន $1+\cos A=\frac{4p(p-a)}{2bc}=\frac{2p(p-a)}{bc}$

ដូចគ្នាដែរ $1+\cos B=\frac{2p(p-b)}{ac}$, $1+\cos C=\frac{2p(p-c)}{ab}$

គេបាន $(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)=\frac{8p^2.p(p-a)(p-b)(p-c)}{(abc)^2}$ **(1)**

តាមរូបមន្តហេរ៉ុង $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{abc}{4R}$

គេទាញ $\dfrac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(abc)^2}=\dfrac{1}{16R^2}$ (2)

យកទំនាក់ទំនង (2) ជំនួសក្នុង (1) គេបាន :

$$(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)=\frac{8p^2}{16R^2}=\frac{1}{2}.\left(\frac{p}{R}\right)^2 \quad (3)$$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

គេទាញ $\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{a+b+c}{2R}=\dfrac{2p}{2R}=\dfrac{p}{R}$ (4)

តាម (3) និង (4) គេបានទំនាក់ទំនង :

$$(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)=\frac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{2}$$ ពិត ។

សម្គាល់ : គេអាចសួរបន្ថែមទៀតដោយឱ្យស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\left(1+\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\right)^3\geq\left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sqrt{2}}\right)^2$$

ដោយប្រើវិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត មធ្យមធរណីមាត្រគេបាន :

$$(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)\leq\left(\frac{1+\cos A+1+\cos B+1+\cos C}{3}\right)^3$$

ឬ $(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)\leq\left(1+\dfrac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\right)^3$

ដោយ $(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)=\dfrac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{2}$

ដូចនេះ $\left(1+\dfrac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\right)^3\geq\left(\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sqrt{2}}\right)^2$ ពិត ។

លំហាត់ទី១៣

ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណចូរស្រាយថា :

$$(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)=8\left(\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}\right)^2$$

ដែល a , b , c ជាជ្រុងត្រីកោណ ABC និង $p=\frac{a+b+c}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)=8\left(\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}\right)^2$$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសគេមាន $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

គេបាន $a^2=(b^2-2bc+c^2)+2bc(1-\cos A)$

គេទាញ $1-\cos A=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$

ដោយ $p=\frac{a+b+c}{2}$ នោះ $a+b-c=2(p-c)$ និង $a-b+c=2(p-b)$

គេបាន $1-\cos A=\frac{4(p-b)(p-c)}{2bc}=\frac{2(p-b)(p-c)}{bc}$

ដូចគ្នាដែរ $1-\cos B=\frac{2(p-a)(p-c)}{ac};1-\cos C=\frac{2(p-a)(p-b)}{ab}$

ដូចនេះ $(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)=8\left(\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}\right)^2$ ពិត

លំហាត់ទី១៤

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយ ។

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $1-\cos A \le \frac{a^2}{2bc}$

ដែល **a , b , c** ជាជ្រុងត្រីកោណ **ABC** ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា $(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C) \le \frac{1}{8}$

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $1-\cos A \le \frac{a^2}{2bc}$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូសគេមាន $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

តាមវិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត មធ្យមធរណីមាត្រគេមាន $b^2 + c^2 \ge 2bc$

គេទាញ $a^2 \ge 2bc - 2bc\cos A = 2bc(1-\cos A)$

ដូចនេះ $1-\cos A \le \frac{a^2}{2bc}$ ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា $(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C) \le \frac{1}{8}$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $1-\cos A \le \frac{a^2}{2bc}$ **(1)**

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $1-\cos B \le \frac{b^2}{2ac}$ **(2)** និង $1-\cos C \le \frac{c^2}{2ab}$ **(3)**

គុណវិសមភាព **(1) , (2) , (3)** អង្គ និង អង្គគេទទួលបាន **:**

$(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C) \le \frac{1}{8}$ ពិត ។

លំហាត់ទី១៥

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយ ។

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B \sin C \cos A$

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា :

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{2\sin A \sin B \sin C}$$

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B \sin C \cos A$

តាង **a , b , c** ជាជ្រុងត្រីកោណ **ABC** និង **R** ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

គេទាញ $\begin{cases} a = 2R\sin A \\ b = 2r\sin B \quad (1) \\ c = 2R\sin C \end{cases}$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad (2)$

យក **(1)** ជំនួសក្នុង **(2)** គេបាន :

$$4R^2 \sin^2 A = 4R^2(\sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B \sin C \cos A)$$

សម្រួល $4R^2$ ក្នុងអង្គទាំងពីរនៃសមភាពគេបាន :

$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B \sin C \cos A$ ពិត

ដូចនេះ $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B \sin C \cos A$ ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា :

$$\cot A+\cot B+\cot C=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C}$$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A$

គេទាញ $\cos A=\dfrac{\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A}{2\sin B\sin C}$ ដោយ $\cot A=\dfrac{\cos A}{\sin A}$

គេបាន $\cot A=\dfrac{\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A}{2\sin A\sin B\sin C}$ **(i)**

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេទទួលបាន $\cot B=\dfrac{\sin^2 A+\sin^2 C-\sin^2 B}{2\sin A\sin B\sin C}$ **(ii)**

និង $\cot C=\dfrac{\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C}$ **(iii)**

ធ្វើផលបូកសមភាព **(i) , (ii) & (iii)** គេបាន :

$$\cot A+\cot B+\cot C=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C}$$ ពិត

ដូចនេះ $\cot A+\cot B+\cot C=\dfrac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C}$ ។

លំហាត់ទី១៦

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយមានមុំ A, B, C ជាមុំស្រួចដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\right)$$ ។

ចូរស្រាយថា **ABC** ជាត្រីកោណសមង្ស ?

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា **ABC** ជាត្រីកោណសមង្ស

តាង a , b , c ជាជ្រុង និង S ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ **ABC**

គេមាន $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$

គេទាញបាន $\sin A = \frac{2S}{bc}$, $\sin B = \frac{2S}{ac}$, $\mathrm{sib}C = \frac{2S}{ab}$

គេបាន $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\frac{2S}{bc}} = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$

ហើយ $\cot B = \frac{a^2+c^2-b^2}{4S}$, $\cot C = \frac{a^2+b^2-c^2}{4S}$

គេបាន $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$ **(1)**

ម្យ៉ាងទៀត $\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} = \frac{bc+ca+ab}{2S}$ **(2)**

តាមសម្មតិកម្ម $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\right)$ **(3)**

យកសមីការ (1) & (2) ជំនួសក្នុង (3) គេបាន :

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}=\frac{ab+bc+ca}{4S}$$

ឬ $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$

ទំនាក់ទំនងនេះសមមូល $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

គេទាញ $\begin{cases} a-b=0 \\ b-c=0 \\ c-a=0 \end{cases}$ នាំឱ្យ $a=b=c$ ។

ដោយត្រីកោណ **ABC** មានជ្រុងបីស្មើគ្នាវាជាត្រីកោណសមង្ស័ ។

សម្គាល់ :

ដោយគេអាចស្រាយថា $\cot A+\cot B+\cot C=\dfrac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C}$

ហើយសម្មតិកម្ម $\cot A+\cot B+\cot C=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sin A}+\dfrac{1}{\sin B}+\dfrac{1}{\sin C}\right)$

គេទាញបានសមីការ :

$$\frac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)$$

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A$$

$$(\sin A-\sin B)^2+(\sin B-\sin C)^2+(\sin C-\sin A)^2=0$$

គេទាញ $\begin{cases} \sin A-\sin B=0 \\ \sin B-\sin C=0 \\ \sin C-\sin A=0 \end{cases}$ នាំឱ្យ $\sin A=\sin B=\sin C$

ឬ $A=B=C$ នោះ **ABC** ជាត្រីកោណសមង្ស័ ។

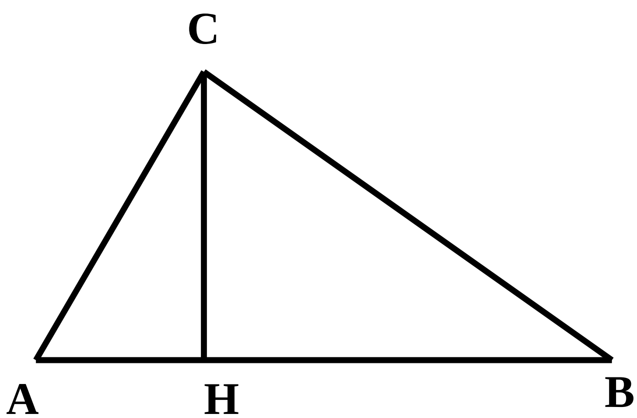
លំហាត់ទី១៧

គេឱ្យត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយមានជ្រុង $\mathbf{AB = 5\,cm}$ និងមានផ្ទៃក្រឡា $\mathbf{S = 6\,cm^2}$ ។

គណនាតម្លៃ $\mathbf{\cot A + \cot B}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃ $\mathbf{\cot A + \cot B}$



សង់កំពស់ $\mathbf{CH}$ នៃ $\mathbf{\Delta ABC}$ ។

គេមាន $\mathbf{\cot A = \dfrac{AH}{CH}}$ និង $\mathbf{\cot C = \dfrac{HB}{CH}}$

គេបាន $\mathbf{\cot A + \cot B = \dfrac{AH + HB}{CH} = \dfrac{AB}{CH} = \dfrac{AB^2}{AB.CH} = \dfrac{AB^2}{2S}}$

ដោយ $\mathbf{AB = 5\ cm}$ & $\mathbf{S = 6\,cm^2}$

ដូចនេះ $\mathbf{\cot A + \cot B = \dfrac{25}{12}}$ ។

លំហាត់ទី១៨

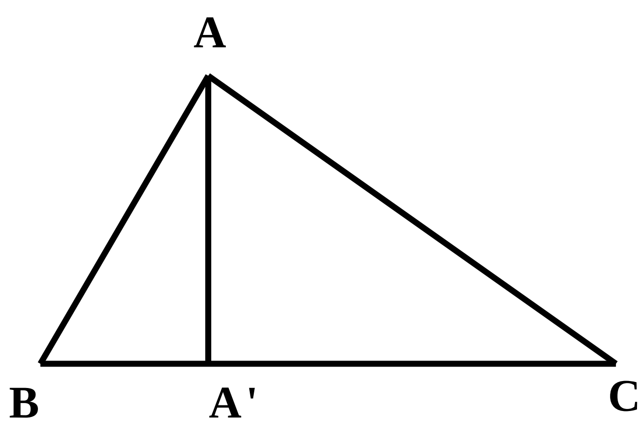
តាង $\mathbf{R}$ ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង $\mathbf{S}$ ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយ ។

ក. ចូរស្រាយថា $(\cot A+\cot B)(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)=\dfrac{2R^2}{S}$

ខ. បើ $\mathbf{ABC}$ ជាមុំស្រួចនោះចូរទាញឱ្យបានថា : $\cos A\cos B\cos C\le\dfrac{1}{8}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $(\cot A+\cot B)(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)=\dfrac{2R^2}{S}$



គូសកំពស់ $AA'=h_a$ នៃ ΔABC ។ តាង $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ ។

ក្នុងត្រីកោណកែង ABA' & $AA'C$ គេមាន $\cot B=\dfrac{BA'}{AA'}$; $\cot C=\dfrac{A'C}{AA'}$

គេបាន $\cot B+\cot C=\dfrac{BA'+A'C}{AA'}=\dfrac{a}{h_a}=\dfrac{a^2}{2S}$ ដែល $\mathbf{S}$ ជាផ្ទៃក្រឡា ΔABC

ដូចគ្នាដែរ $\cot C+\cot A=\dfrac{b^2}{2S}$, $\cot A+\cot B=\dfrac{c^2}{2S}$

គេបាន $(\cot A+\cot B)(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)=\dfrac{a^2b^2c^2}{8S^3}$

ដោយ $S=\dfrac{abc}{4R}$ នោះ $abc=4RS$

គេបាន $(\cot A+\cot B)(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)=\dfrac{16R^2S^2}{8S^3}$

ដូចនេះ $(\cot A+\cot B)(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)=\dfrac{2R^2}{S}$ ។

ខ. ទាញ ឱ្យបានថា : $\cos A\cos B\cos C\le\dfrac{1}{8}$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន :

$$(\cot A+\cot B)(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)=\frac{2R^2}{S}\quad (i)$$

បើ ABC ជាមុំស្រួចនោះ $\cot A>0\ ,\ \cot B>0\ ,\ \cot C>0$

តាមវិសមភាព មធ្យមនព្វន្ត មធ្យមធរណីមាត្រគេមាន :

$\cot A+\cot B\ge 2\sqrt{\cot A\cot B}\ ,\ \cot B+\cot C\ge 2\sqrt{\cot B\cot C}$

$\cot C+\cot A\ge 2\sqrt{\cot C\cot A}$

គុណវិសមភាពខាងលើនេះ អង្គ និង អង្គ គេបាន

$$(\cot A+\cot B)(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)\ge 8\cot A\cot B\cot C\ (ii)$$

តាម $(i)\&(ii)$ គេទាញបាន $8\cot A\cot B\cot C\le\dfrac{2R^2}{S}$

តែ $S=\dfrac{abc}{4R}=\dfrac{8R^3\sin A\sin B\sin C}{4R}=2R^2\sin A\sin B\sin C$

គេបាន $8\cot A\cot B\cot C\le\dfrac{2R^2}{2R^2\sin A\sin B\sin C}$

ដូចនេះ $\cos A\cos B\cos C\le\dfrac{1}{8}$ ។

លំហាត់ទី១៩

គេឱ្យត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយមានជ្រុង $\mathbf{BC=a}$, $\mathbf{AC=b}$, $\mathbf{AB=c}$ ចារឹកក្នុងរង្វង់មួយមានផ្ចិត $\mathbf{O}$ និង កាំ $\mathbf{R}$ ។ តាង $\mathbf{S}$ និង $\mathbf{S_{OBC}}$ ជាផ្ទៃក្រឡានៃ $\mathbf{\Delta OBC}$ និង $\mathbf{\Delta ABC}$ រៀងគ្នា ។ សន្មតថា $\mathbf{A,B,C}$ ជាមុំស្រួច ។

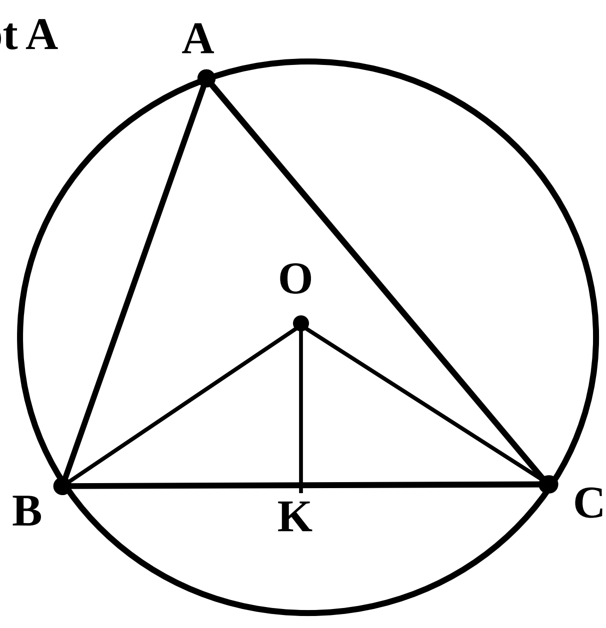
ក. ចូរស្រាយថា $\mathbf{S_{OBC}=\frac{1}{4}a^2\cot A}$ ។

ខ. ចូរទាញបង្ហាញថា $\mathbf{a^2\cot A+b^2\cot B+c^2\cot C=4S}$ ។

គ. ចូរទាញបង្ហាញថា $\mathbf{a\cos A+b\cos B+c\cos C=\frac{abc}{2R^2}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា $\mathbf{S_{OBC}=\frac{1}{4}a^2\cot A}$



តាង $\mathbf{K}$ ជាចំណុចកណ្ដាលនៃជ្រុង $\mathbf{[BC]}$ នោះ $\mathbf{[OK]\perp[BC]}$ ។

គេមាន $\mathbf{\angle BOK=\frac{\angle BOC}{2}=\angle BAC=\angle A}$ ។

ក្នុងត្រីកោណកែង **OBK** គេមាន :

$$\cot\angle BOK=\cot A=\frac{OK}{BK}=\frac{2OK}{BC}=\frac{2OK}{a}$$

គេទាញ $OK=\frac{1}{2}a\cot A$ ។

ក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ **OBC** គឺ $S_{OBC}=\frac{1}{2}BC.OK=\frac{1}{4}a^2\cot A$ ពិត

ដូចនេះ $S_{OBC}=\frac{1}{4}a^2\cot A$ ។

ខ. ទាញបង្ហាញថា $a^2\cot A+b^2\cot B+c^2\cot C=4S$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $S_{OBC}=\frac{1}{4}a^2\cot A$

ដូចគ្នាដែរ $S_{OCA}=\frac{1}{4}b^2\cot B$ និង $S_{OAB}=\frac{1}{4}c^2\cot C$

ដោយ $S=S_{OBC}+S_{OCA}+S_{OAB}$

គេបាន $S=\frac{1}{4}(a^2\cot A+b^2\cot B+c^2\cot C)$

ដូចនេះ $a^2\cot A+b^2\cot B+c^2\cot C=4S$ ។

គ. ទាញបង្ហាញថា $a\cos A+b\cos B+c\cos C=\frac{abc}{2R^2}$

គេមាន $a^2\cot A+b^2\cot B+c^2\cot C=4S=\frac{abc}{R}$ ព្រោះ $S=\frac{abc}{4R}$

ដោយ $a^2\cot A=\frac{a}{\sin A}.a\cos A=2Ra\cos A$, $b^2\cot B=2Rb\cos B$

នោះគេបាន $a\cos A+b\cos B+c\cos C=\frac{abc}{2R^2}$ ។

លំហាត់ទី២០

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយមានជ្រុង $\mathbf{BC=a}$, $\mathbf{AC=b}$, $\mathbf{AB=c}$ ។

តាង $\mathbf{p=\frac{a+b+c}{2}}$ ជាកន្លះបរិមាត្រ ហើយ $\mathbf{r}$ និង $\mathbf{R}$ ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ **ABC** រៀងគ្នា ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

ក. $\mathbf{ab+bc+ca=p^2+r^2+4rR}$

ខ. $\mathbf{a^2+b^2+c^2=2p^2-2r^2-8rR}$

គ. $\mathbf{a^3+b^3+c^3-3abc=2p(p^2-3r^2-12rR)}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា :

ក. $\mathbf{ab+bc+ca=p^2+r^2+4rR}$

តាមរូបមន្តហេរ៉ុង $\mathbf{S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$

តែគេមាន $\mathbf{S=pr}$ នោះគេបានសមីការ

$$\mathbf{pr=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេគេបាន :

$$\mathbf{p^2r^2=p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\mathbf{pr^2=p^3-(a+b+c)p^2+(ab+bc+ca)p-abc}$$

ដោយ $\mathbf{a+b+c=2p}$ ហើយ $\mathbf{abc=4R.S=4R.pr}$

$pr^2 = p^3 - 2p^3 + (ab+bc+ca)p - 4R.pr$

$pr^2 = -p^3 + (ab+bc+ca)p - 4rRp$

គេទាញ $ab+bc+ca = \dfrac{pr^2+p^3+4rRp}{p}$

ដូចនេះ $ab+bc+ca = p^2+r^2+4rR$

ខ. $a^2+b^2+c^2 = 2p^2-2r^2-8rR$

គេមាន $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$

ដោយ $a+b+c=2p$ និង $ab+bc+ca = p^2+r^2+4rR$

ដូចនេះ $a^2+b^2+c^2 = 2p^2-2r^2-8rR$ ។

គ. $a^3+b^3+c^3-3abc = 2p(p^2-3r^2-12rR)$

គេមានសមភាព :

$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)[(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)]$

ដោយ $a+b+c=2p$ និង $ab+bc+ca = p^2+r^2+4rR$

ដូចនេះ $a^3+b^3+c^3-3abc = 2p(p^2-3r^2-12rR)$ ។

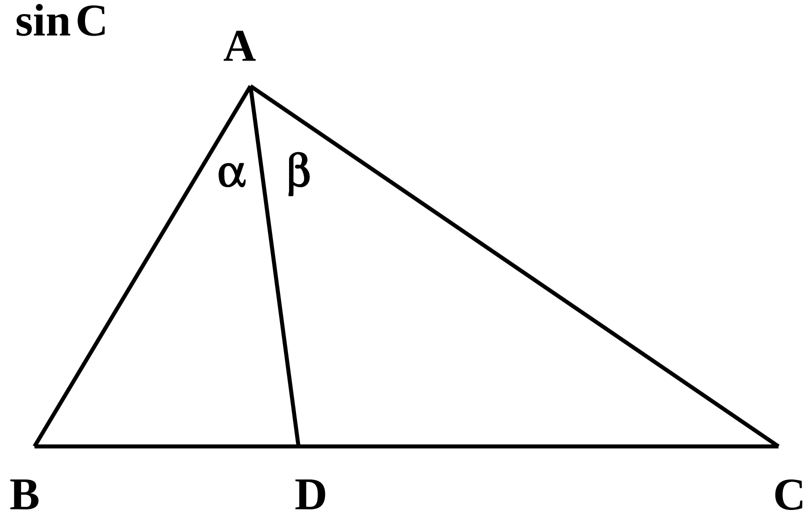
លំហាត់ទី២១

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយ ។ **D** ជាចំណុចមួនៃជ្រុង **[BC]** ដែល $\angle BAD = \alpha$ និង $\angle DAC = \beta$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{BC}{AD} = \frac{\sin\alpha}{\sin B} + \frac{\sin\beta}{\sin C}$?

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{BC}{AD} = \frac{\sin\alpha}{\sin B} + \frac{\sin\beta}{\sin C}$



តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូសអនុវត្តន៍

ក្នុង ΔABD & ΔADC

គេមាន $\frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{AD}{\sin B}$

ឬ $BD = \frac{\sin\alpha}{\sin B}.AD \quad (1)$

ហើយ $\frac{DC}{\sin\beta} = \frac{AD}{\sin C}$

ឬ $DC = \frac{\sin\beta}{\sin C}.AD \quad (2)$

បូកទំនាក់ទំនង **(1) & (2)** គេបាន $BD + DC = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin B} + \frac{\sin\beta}{\sin C}\right).AD$

ដោយ $BD + DC = BC$ នោះ $BC = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin B} + \frac{\sin\beta}{\sin C}\right).AD$

ដូចនេះ $\frac{BC}{AD} = \frac{\sin\alpha}{\sin B} + \frac{\sin\beta}{\sin C}$ ។